



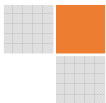
مروری بر تحلیل و طراحی
پلاستیک سازه‌های فولادی
درسنامه، کاربردها و مثال‌های
تکمیلی

مهندس شادی سلیمی مقدم

مهندس علیرضا صالحین

تقدیم نامه:

با کمال افتخار و احترام تقدیم به تمامی تکاوران زحمتکش تیپ ۶۵
نوهد ارتش جمهوری اسلامی ایران - مهندس علیرضا صالحین



مقدمه مترجمین

کتاب پیش روی شما ترکیبی از دو منبع به روز دنیا در زمینه تحلیل و طراحی پلاستیک سازه های فولادی می باشد. نخستین بخش کتاب متعلق به مرجع ارزشمند مایکل برونوو، ویرایش دوم کتاب *Ductile Design of Steel Structures* می باشد. کتاب مذکور پیشتر توسط مدیر علمی همین انتشارات ترجمه شده بود، اما برخی از فصول در رابطه با تحلیل، طرح و کاربرد روش پلاستیک در آن ترجمه قرار نگرفته بود، در هر حال، این بخش کتاب به نوعی مکمل کتاب "دیتیل ها و طراحی ساختمان های فولادی مقاوم در برابر زلزله با رویکرد رفتارشناسی اعضا به روش *LRFD*" می باشد، همچنین علاوه بر فصول کتاب مذکور از ویرایش دوم کتاب به روز و معتبر مک کنزی با نام "*Examples for Structural Analysis*"، بخش تحلیل پلاستیک که درس نامه همراه با حل مثال های متعددی در حالات مختلف می باشد، استفاده گردیده است.

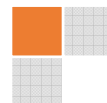
اثر پیش رو را می توان برای مطالعه بیشتر و عمیق تر بر مباحث تحلیل و طراحی پلاستیک، به خصوص نکات کاربردی آن در مباحث به روز، طرح بهینه و لرزه ای به کار برد. این کتاب را نمی توان کتابی از کاملاً آموزشی از صفر تا صد برای تحلیل و طراحی پلاستیک در نظر گرفت و کاربران محترم می بایستی مطالعات بر روی تحلیل و طرح پلاستیک (خمیری) سازه ها را (در دانشگاه یا مطالعات شخصی) در این زمینه داشته باشند. بنابراین توصیه می گردد که پیشتر از مطالعه این کتاب مطالعات ابتدایی روی تحلیل و طرح پلاستیک سازه ها انجام گردد تا بتوان نهایت استفاده را از این کتاب جست. گرچه، در این کتاب، مباحث از پایین ترین سطح تا کاربردی ترین و پیچیده ترین سطوح بررسی شده اند.

به منظور صرفه جویی بیشتر در کاغذ (تا حد ممکنه) تلاش بر آن بوده که از فونت بهینه، اشکال در ابعاد مناسب استفاده گردد. همچنین مجموعه تمرین های انتهایی فصول نیز حذف گردیده است. این سری از تمرینات همراه با مجموعه عظیمی دیگر از کتب در کانال تلگرامی <https://t.me/seismicisolation> موجود می باشد، کافیست که هر یک از کتب یا کلید واژه های جستجو گردد تا منابع مورد نظر سریعاً در دسترس مخاطب محترم قرار گیرد، بنابراین دیگر نیازی به همراه بودن *DVD* برای این کتاب نمی باشد.

با تمام تلاشهای صورت گرفته این کتاب خالی از نقص و ایراد نخواهد بود. بنابراین، ضمن پوزش از خوانندگان عزیز به دلیل نقایص احتمالی، اشتباهات چاپی، پایین بودن کیفیت یکسری از تصاویر (که نتوانستیم کیفیت بهتری از تصاویر مذکور را تهیه نماییم) از عزیزان خواننده تقاضا می شود نظرات و پیشنهادات خود را که می تواند به رفع نواقص و ارتقاء سطح علمی کتاب در چاپ های بعدی کمک کند، از طریق انتشارات (۶۶۹۵۳۷۷۴-۶۶۴۱۰۶۸۸) یا شناسه تلگرام [@alirezasaalehin](https://t.me/alirezasaalehin) به ما انتقال دهید. در آخر لازم می دانم از زحمات و دلسوزی های سرکار خانم مهندس مقدم که با وسواس و دلسوزی مثال زدنی در امر ترجمه این اثر نهایت همکاری مخلصانه را انجام داده اند، کمال تشکر نمایم. همچنین از جناب آقایان علیرضا و رسول فرهمندزادگان که همیشه در زمینه چاپ و نشر کتاب حقیر را پشتیبانی نموده اند نیز به نوبه خود تشکر می نمایم.

مهندس علیرضا صالحین - مهندس شادی مقدم

بهار ۱۳۹۷



فهرست مطالب

فصل اول- رفتار پلاستیک در سطح، سطح مقطع صفحه ۱۲۳

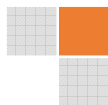
فصل دوم- مفاهیم تحلیل پلاستیک صفحه ۱۲۳

فصل سوم- روشهای سیستماتیک تحلیل پلاستیک صفحه ۱۲۳

فصل چهارم- کاربردهای تحلیل پلاستیک صفحه ۱۲۳

فصل پنجم- تحلیل پلاستیک، به همراه مثال های عددی کاربردی صفحه ۱۲۳

دیکشنری تخصصی صفحه ۱۲۳



فصل اول: رفتار پلاستیک در سطح، سطح مقطع

هنگامیکه مشخصات مصالح بدست می آید و یک مدل تحلیلی تنش- کرنش مناسب فرمول بندی می شود، ظرفیت های پلاستیک در سطح مقطع عرضی (که یک فاز مهم از تحلیل پلاستیک می باشد) را می توان محاسبه کرد. محاسبه این ظرفیت ها که پیچیدگی خاص خود را دارد، در درجه اول بر مقاومت های برآیند پلاستیک عضو و سازه تاثیر می گذارد. بدین دلیل که تحلیل پلاستیک برای محاسبه ظرفیت های نهایی سازه استفاده می گردد، اگر مدل مقطع عرضی بیش از اندازه ساده سازی شود، خطاهای زیادی در نتایج رخ داده و سازه سطح ایمنی کافی را نخواهد داشت. از اینرو مرور چگونگی حالات مختلف که برای مشخصات مقطع عرضی رخ می دهد، بسیار ارزشمند و حائز اهمیت می باشد.

۱-۱- تسلیم خمشی خالص

مهندسانی که از طراحی حالات حدی یا مقاومت نهایی استفاده می کنند، با حالت اساسی تسلیم خمشی خالص آشنایی دارند. برخی از فرضیات ساده شده برای محاسبه ظرفیت ممان پلاستیک به شرح زیر است:

- مقاطع مسطح، مسطح باقی می ماند؛ اگرچه معمولاً تغییر شکل های پلاستیک از تغییر شکل های الاستیک بزرگتر هستند، اما بزرگی کلیت آنها به اندازه کافی برای ارضاء این شرایط کوچک می باشد.
- اعضای سازه ای باید منشوری بوده و حداقل یک محور تقارن موازی با جهت بارگذاری داشته باشد.
- اعضا در معرض خمش تک محوره تحت بارگذاری یکنواخت افزایشی قرار دارد (محور خنثی عمود بر محور تقارن است).
- تغییر شکل های برشی نادیده گرفته می شود.
- از ناپایداری اعضا (کمانش موضعی بال، کمانش موضعی جان و کمانش پیچشی- جانبی) اجتناب می گردد.
- اعضای سازه ای نباید در معرض نیروهای محوری، پیچشی یا برشی قرار گیرد. این فرض در بخش های بعدی این فصل تشریح می گردد.

مدل الاستوپلاستیک کامل، معمولاً جهت محاسبه ظرفیت های ممان پلاستیک بکار می رود و نتایج قابل قبولی را برای اکثر مسائل عملی در مهندسی سازه حاصل می نماید (ASCE, 1971). از اینرو سر رشته قرار می گردد. با این حال چیزی مانع در نظر گرفتن مدل های پیچیده تر نمی شود (یا فرضیات اصلی کمی برای آن موضوع). به همین دلیل مقاومت های متناظر با مقطع عرضی و دیگر مشخصات پلاستیک مربوطه را می توان از مفاهیم اساسی که اینجا ارائه می شود، تعیین کرد.

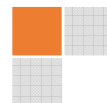
۱-۱-۱- مقاطع متقارن دو محوره

به دلیل آنکه محور خنثی مقاطع متقارن دو محوره در مرکز هندسی آن واقع شده است، این مقاطع جزء ساده ترین مقاطع عرضی می باشند که عبارات تحلیلی مقاومت پلاستیک آنها را می توان توسعه داد. برای یک مقطع عرضی با مدل مصالح الاستوپلاستیک کامل، دیاگرام های تنش را می توان بطور مستقیم از دیاگرام های کرنش مطابق با شکل ۱-۱، برای سطوح مختلف کرنش های افزایشی یک مقطع متقارن دو محوره دلخواه، بدست آورد.

در هر نقطه ای در طول بارگذاری (نظیر آنچه در شکل ۱-۱ نشان داده شده است)، ϕ انحناء مقطع عرضی می باشد که با روابط هندسی ساده به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\phi = \frac{\epsilon_{max}}{(h/r)} (1-1)$$

که در آن، ϵ_{max} حداکثر کرنش در مقطع عرضی متقارن دو محوره و h عمق مقطع می باشد. اگر در یک انحناء داده شده، ϵ کرنش تسلیم باشد و مطابق با شکل ۱-۱ در فاصله y^* از محور خنثی واقع شده باشد، با استفاده از تشابه مثلثات داریم:

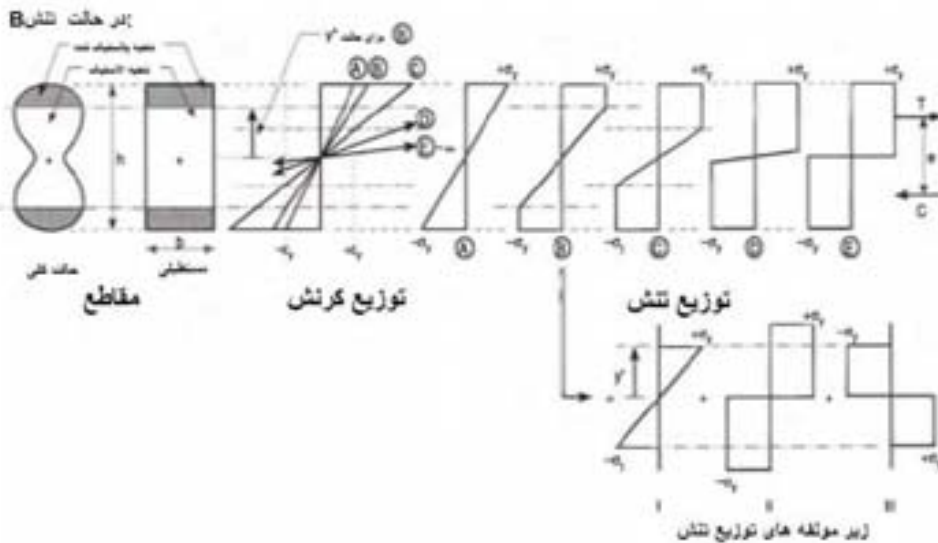


$$\phi = \frac{\epsilon_{max}}{(h/r)} = \frac{\epsilon_y}{y^*} \quad y^* = \left(\frac{h}{r}\right) \frac{\epsilon_y}{\epsilon_{max}} (r-1)$$

زمانیکه برای یک انحناء معین، y^* تعیین می‌گردد، ممان‌های متناظر، با استفاده از اصول ساده مقاومت مصالح با روشی ساده محاسبه می‌شود:

$$M = \int_{-h/r}^{h/r} \sigma y dA = \int_{-h/r}^{h/r} \sigma y b(y) dy$$

که در آن، b عرض مقطع می‌باشد که به عنوان تابعی از y بیان شده است.



شکل ۱-۱- توزیع تنش و کرنش در محدوده پلاستیک اعضا با مقطع متقارن

برای هر انحناء معین، مقطع عرضی را می‌توان به دو ناحیه الاستیک و پلاستیک تقسیم کرد. ناحیه الاستیک در محدوده ϵ_y از محور خنثی می‌باشد. خارج از این ناحیه، هسته الاستیک نامیده می‌شود که کرنش‌ها از ϵ_y فراتر می‌رود و مصالح پلاستیک می‌شود. با افزایش انحناء، هسته الاستیک به صورت پیشرونده منقبض گردیده و پلاستیک‌شدگی به صورت پیشرونده در سراسر مقطع عرضی گسترش می‌یابد.

تاثیر این رشد پیشرونده در ناحیه پلاستیک‌شده بر رابطه ممان-شیب با مطالعه موردی قابل درک می‌باشد. جهت ساده‌سازی از یک مقطع عرضی مستطیلی استفاده می‌شود. محاسبات بطور مستقیم با پروفیل‌های کرنش که در شکل ۱-۱ مشخص شده است، مرتبط می‌باشد که در آن از یک مقطع مستطیلی با ارتفاع h و عرض مقطع b استفاده شده است. برای مثال در محدوده الاستیک، ممان خمشی و انحناء به صورت زیر بدست می‌آید:

$$M = S\sigma = \left(\frac{bh^2}{6}\right) \sigma \quad \phi = \frac{M}{EI} = \left(\frac{12}{bh^3}\right) \frac{M}{E} (4-1)$$

که در آن، S مدول مقطع می‌باشد. برای توزیع کرنش الف در شکل ۱-۱، کرنش تسلیم در فایبر بالایی مقطع عرضی قرار دارد. هنگامیکه در معادله بالا σ_y جایگزین σ می‌شود، ممان تسلیم، M_y و انحنای تسلیم، ϕ_y می‌گردد که در واقع نقطه انتقال رفتار الاستیک خالص و الاستوپلاستیک می‌باشد. از آن نقطه به بعد هرگونه افزایش در انحناء بیانگر پلاستیک‌شدگی نسبی مقطع عرضی می‌باشد که گاهی جریان پلاستیک محدود (*contained plastic flow*) نامیده می‌شود. برای مثال، برای یک پروفیل دلخواه کرنش که با حالت ب در شکل ۱-۱ بیان می‌شود، انحناء از معادله ۱-۱ و ممان متناظر را می‌توان به صورت تابعی از y^* بیان کرد:

$$M = \tau \int_{y^*}^{y^*} \sigma_y b dy + \tau \int_{y^*}^{h/\tau} \sigma_y y b dy \quad (5-1)$$

که اولین عبارت آن سهم هسته الاستیک به مقاومت خمشی و عبارت دوم ناحیه پلاستیک شده را نشان می‌دهد. با استفاده از رابطه $\sigma/\sigma_y = y/y^*$ رابطه ۵-۱ در سراسر هسته الاستیک به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$M = \left[\frac{\tau b}{y^*} \int_{y^*}^{y^*} y^2 dy + \tau b \int_{y^*}^{h/\tau} y dy \right] \sigma_y = \frac{\tau}{3} b (y^*)^2 \sigma_y + \frac{b h^2}{4} \sigma_y - b (y^*)^2 \sigma_y \quad (6-1)$$

قابل توجه است، سه عبارت سمت راست این معادله متناظر با سهم‌های ممان می‌باشد که مطابق با شکل ۱-۱ از تجزیه قسمتی از دیاگرام تنش به زیر دیاگرام‌های I ، III و II بدست می‌آید. در این روش اضافه یا کم کردن دیاگرام‌های تنش، یک روش صحیح استاتیکی می‌باشد که آن را می‌توان برای ساده‌سازی مسائل پیچیده و صحت روش ترسیمی برای نتایج تحلیلی بدست آمده با فایده دانست. در این روش بهتر است به عنوان آخرین راه حل از روش انتگرال‌گیری استفاده شود (معادله ۵-۱ و ۶-۱). زیرا این روش نسبت به روش مستقیم با دیاگرام‌های تنش و بازوهای اهرمی وارد بر مقطع عرضی با شکل منظم، دارای زمان محاسبات و خطای بیشتری می‌باشد. مهم‌تر از همه اینکه در روش دوم، به جای استفاده از ریاضیات، از فیزیک مسئله استفاده می‌شود که برای قضاوت مهندسی مفیدتر است.

جهت تکمیل بحث، بهتر است که روابط با عبارت‌های $(y^*)^2$ بازنویسی شود و نتایج بر حسب انحناء بیان گردند. بنابراین زمانیکه از رابطه زیر استفاده می‌شود (مجدداً از روابط تشابه مثلثات استفاده می‌گردد):

$$\frac{y^*}{h/\tau} = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_{max}} = \frac{\phi_y y}{y \phi} = \frac{\phi_y}{\phi} (V-1)$$

این عبارت برای ممان خمشی در یک انحنای معین (به عنوان مثال رابطه ممان-شیب) به صورت زیر می‌شود:

$$M = \left[\frac{b h^2}{4} - \frac{b h^2}{12} \left(\frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 \right] \sigma_y \quad (8-1)$$

در صورت امکان بهتر است عبارت‌های (M/M_y) و (ϕ/ϕ_y) جهت نرمال کردن بکار رود. برای مثال هنگامیکه

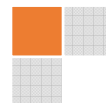
معادله ۴-۱ جهت رسیدن به ممان تسلیم بکار می‌رود، نتیجه نهایی به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{\tau}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 \right] = \frac{\tau}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\epsilon_y}{\epsilon_{max}} \right)^2 \right] \quad (9-1)$$

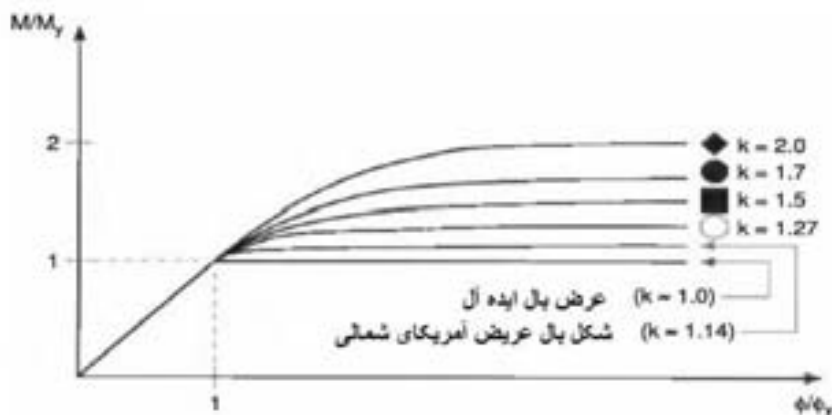
بخش دوم از این معادله، بر حسب عبارت‌های نسبت کرنش که از هم‌ارزی ساده‌ای که بین کرنش‌ها و انحناءها وجود

دارد، بدست می‌آید.

هنگامیکه معادلات ۴-۱ و ۹-۱ در محدوده مورد اعتبار خود بکار می‌روند، کل رابطه ممان-شیب را می‌توان برای این مقطع عرضی محاسبه و رسم نمود که برای مقاطع مختلف در شکل ۲-۱ در قالب نمودار رسم شده است. شکل ۱-۱ و معادله ۹-۱ نشان می‌دهند، از لحاظ تئوری برای هر مقطع عرضی پلاستیک‌شدگی کامل و ممان خمشی ماکزیمم تنها در انحناء بی‌نهایت به وقوع می‌پیوندد (طراحی ه در شکل ۱-۱). حداکثر ممان در مقطع مستطیلی ۱.۵ برابر ممان تسلیم می‌باشد که به راحتی از ساده کردن معادله ۹-۱ بدست می‌آید. هرچند برای اهداف عملی همانطور که در شکل ۲-۱ مشاهده می‌شود، حداکثر ممان سریعاً تقریب زده می‌شود و تقریباً به سه یا چهار برابر انحناء تسلیم می‌رسد. در حقیقت، هنگامیکه کرنش ماکزیمم در سراسر مقطع عرضی به نقطه شروع سخت‌شدگی کرنشی مصالح فولادی که تقریباً ۱۰ برابر مقدار کرنش تسلیم است، نزدیک می‌شود، معادله ۹-۱ نشان می‌دهد که به ۹۹.۷٪ از ممان ماکزیمم رسیده است. این حاکی از آن است



که می توان از یک مقطع کاملاً پلاستیک شده جهت محاسبه ممان ماکزیمم که از آن به عنوان "ممان پلاستیک" یاد می-شود، استفاده کرد.



شکل ۱-۲- رابطه ممان شیب نرمال شده و ضریب شکل خمشی k برای مقاطع عرضی مختلف

به عنوان مثال، برای مقطع عرضی مستطیلی می توان ممان پلاستیک را بطور مستقیم با استفاده از برآیند نیروها و بازوی اهرمی مطابق با توزیع تنش σ در شکل ۱-۱ به صورت زیر محاسبه کرد:

$$(1.0-1)M_p = 2 \left[\left(\frac{e}{r} \right) \right] = 2 \left[\sigma_y \left(\frac{h}{r} \right) b \right] \left(\frac{h}{r} \right) = \frac{bh^3}{r} \sigma_y = Z \sigma_y = 1.5 M_y$$

که در آن، Z مدول مقطع پلاستیک می باشد که با توجه به ویژگی های هندسی مقطع عرضی تعیین می گردد. در ضمن عبارت جبری فوق برای مقطع مستطیلی (یعنی، $bh^2/4$) بطور وسیعی جهت محاسبه ممان پلاستیک برای اشکال سازه ای که دارای قسمت های مستطیلی هستند، استفاده می شود.

یکی دیگر از ویژگی های مفید مقطع ضریب شکل k می باشد که به صورت نسبت مدول مقطع پلاستیک به مدول مقطع الاستیک تعریف می گردد. این ضریب به صورت زیر بیان می گردد:

$$(1.1-1)k = \frac{M_p}{M_y} = \frac{Z}{S}$$

که اطلاعاتی را در مورد مقاومت اضافی موجود مقطع عرضی فراتر از اولین تسلیم شدگی مهیا می سازد. ضرایب شکل برای مقاطع مختلف در شکل ۱-۲ نشان داده شده است. برای مقاطع بال پهن که معمولاً برای ساخت و سازه های آمریکای شمالی بکار می رود (*AISC 2011* و *CISC 2010*)، ضرایب شکل بین ۱.۱۲ الی ۱.۱۶ تغییر می کند که بطور میانگین ۱.۱۴ می باشد. علاوه بر این، عبارات ممان انحناء نرمال شده را می توان به صورت زیر به دست آورد:

- هنگامی که y^* در بال قرار می گیرد:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{\phi}{\phi_y} \left(1 - \frac{bd^2}{6\phi} \right) + \frac{bh^2}{4\phi} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 \right] (12-1)$$

- هنگامی که y^* در جان قرار می گیرد:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{M_p}{M_y} - \left(\frac{wd^2}{12\phi} \right) \left(\frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 (13-1)$$

که در آن، b پهنای بال، d عمق کل مقطع سازه، h فاصله بین بال ها (یا طول جان)، w ضخامت جان می باشد و بقیه عبارات نیز قبلاً تعریف شده اند. در این حالت M_p را می توان از برآیند نیروهای محاسبه شده به صورت جداگانه از تنش تسلیم ثابتی که در بال ها و جان موجود است، برآورد کرد و بازوری اهرمی مربوطه آنها مجدداً با استفاده از معادله ۱-۱۰ با

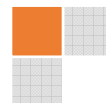
کم کردن مقدار M_{pp} برای مستطیلی به عرض $(b-w)$ و ارتفاع h از ممان مستطیلی به عرض b و ارتفاع d بدست می آید. در هر دو مورد از روش های محاسبه دستی معمولاً از مساحت گوشه های گرد شده که بال ها به جان متصل می شوند، صرف نظر می شود. اما در دستورالعمل های طراحی معمولاً در ویژگی مصالح که در جداولی ارائه می شود، در نظر گرفته می شود. اصول اساسی مقاومت مصالح نشان می دهد، یک مقطع بال پهن ایده آل بوسیله بال های با ضخامت بی نهایت کوچک خود که بیشتر مصالح نیز در آن متمرکز شده است، در مقابل خمش مقاومت می کند (واضح است که یک حالت تئوری غیر عملی می باشد). ضریب شکل چنین مقطع ایده آلی واحد می گردد، به دلیل اینکه تمام مقطع عرضی بطور همزمان به کرنش تسلیم می رسد و به دلیل اینکه فرض می شود هیچگونه مصالحی بین بال ها وجود ندارد، گسترش پلاستیک شدگی نیز نخواهیم داشت. از اینرو مدول مقطع پلاستیک و الاستیک در این حالت برابر با مساحت یک بال در فاصله بین دو بال می گردد.

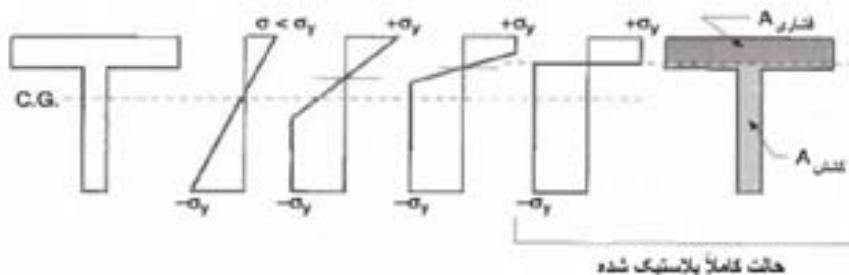
۱-۲-۱-۱- مقاطع متقارن تک محوره

روش توسعه یافته بالا برای مقطعی که تنها یک محور تقارن موازی با بار اعمالی دارند نیز بکار می رود، با این تفاوت که در این حالت باید محور خنثی با صراحت مشخص گردد. بنابراین برای هر انحنا معین، محاسبات باید با تعیین محور خنثی انجام پذیرد. مواردی وجود دارد که این محاسبات به نسبت ساده می شود. اول اینکه؛ تا زمانی که مصالح کاملاً الاستیک خطی می باشد، موقعیت محور خنثی در مرکز هندسی مقطع عرضی باقی می ماند. دوم؛ زمانی که مصالح کاملاً پلاستیک می باشد، محور خنثی باید به نحوی قرار گیرد که مساحت مقطع عرضی به دو قسمت مساوی تقسیم گردد. مورد دوم هنگامی اتفاق می افتد که کل مقطع عرضی تحت تنش تسلیم کششی و یا فشاری قرار گیرد. برآیند نیروهای محوری در مقطع عرضی:

$$P = \int_{\text{area}} \sigma dA = A_{\text{tension}} \sigma_y + A_{\text{compression}} (-\sigma_y) = 0 \rightarrow A_{\text{tension}} = A_{\text{compression}} \quad (1-14)$$

که در آن موقعیت محور خنثی در شرایط کاملاً پلاستیک تعیین می گردد. در مرحله تبدیل بین شرایط الاستیک کامل و پلاستیک کامل، در محلی که پلاستیک شدگی در سراسر مقطع با افزایش ممان اعمالی توسعه می یابد، محور خنثی به صورت پیشرونده منتقل می گردد. این روند به صورت شماتیک در شکل ۱-۳ نشان داده شده است. برای حالات میانی، اگرچه توسعه روابط تحلیلی ممان-شیب امکان پذیر است، ولی به جز در برخی موارد ساده، نسبتاً پیچیده می باشد. بنابراین حتی اگر بتوان روابط ضمنی ممان-شیب را همانند بخش ۱-۱-۱ بدست آورد، برای مقاطع عرضی دارای تقارن تک محوره و یا دو محوره در بعضی از مواقع بهتر است ممان های متناظر با تعداد زیادی از انحناءها، با بکارگیری روش *Ramberg-Osgood* و یا تابع *Pinto-Menegotto* محاسبه گردد. هنگامی که از محاسبات دستی استفاده می شود، هر نقطه ممان-شیب را می توان با انتخاب مقدار برای کرنش در بالای مقطع عرضی بدست آورد و با انتخاب فرضی موقعیتی برای محور خنثی، برآیند نیروی محوری از دیاگرام کرنش فرضی محاسبه گردیده و موقعیت قرارگیری محور خنثی آنقدر عوض می شود تا نیروی محوری صفر گردد. با تکرار این روش برای مقادیر مختلف کرنش، می توان رابطه ممان-شیب را برای یک مقطع معین رسم نمود. با بکارگیری همین استدلال نقاط ممان-شیب را می توان با برنامه های کامپیوتری تولید کرد. رابطه تقریبی ممان-شیب حاصل از این روش از دقت کافی جهت محاسبه سختی یا خیزهای عضو برخوردار خواهد بود.





شکل ۱-۳- انتقال محور خنثی در مقطع عرضی دارای یک محور تقارن به عنوان ممان اعمالی که در طی پلاستیک‌شدگی پیشرونده افزایش می‌یابد.

برنامه‌های کامپیوتری متعددی وجود دارد که قادرند روابط ممان-شیب را برای مقاطع عرضی دلخواه تحت خمش تک محوره یا دومحوره توسعه دهند. این برنامه‌ها اغلب می‌توانند نیروهای محوری، برشی و فاکتورهای دیگر را در نظر بگیرند. همچنین، اینگونه برنامه‌ها معمولاً به دلیل اینکه سازه آنها نسبتاً ساده است، می‌توانند به راحتی نوشته شوند. به عنوان مثال برای یک مقطع دلخواه که دارای یک محور تقارن (موازی با بار اعمالی) است و در معرض خمش تک محوره قرار دارد، کفایت از یک مدل لایه‌ای مقطع عرضی استفاده شود. در این مدل مقطع عرضی شامل لایه‌های زیادی مثلاً بالغ بر ۱۰۰۰ لایه می‌شود و سهم هر یک از این لایه‌ها از ممان خمشی در یک انحنای معین محاسبه و انتگرال‌گیری می‌شود. ساختار چنین برنامه‌ای را می‌توان با نوشتن سابروتین‌هایی جهت انجام وظایف زیر نوشت:

- لایه‌بندی خودکار مقطع عرضی (بر اساس ورودی ساده‌ای از ویژگی‌های هندسی) صورت گیرد.
- یک مقدار اولیه به مقادیر تنش برای تمام لایه‌ها بدهید و پارامترهای اولیه دیگر را معین کنید.
- کنترل‌هایی برای استراتژی تکرار تنظیم کنید.
- انحناء را جهت محاسبه ممان-شیب نقطه داده شده افزایش دهید.
- موقعیت محور خنثی را تخمین بزنید و آن را با توجه به استراتژی تکرار تنظیم کنید (یعنی نتایج حاصل از تکرارهای قبلی در نظر گرفته شوند).
- برای انحناء داده شده و موقعیت محور خنثی مورد نظر، کرنش‌ها را برای تمام لایه‌ها محاسبه کنید.
- برای تمام لایه‌ها در مدل مصالح فرضی، تنش‌ها را محاسبه کنید.
- برآیند ممان را با جمع سهم تمام لایه‌ها در پیرامون محور خنثی محاسبه کنید.
- برآیند نیروی محوری در مقطع عرضی را با جمع کردن سهم کل لایه‌ها محاسبه کنید.
- همگرایی مورد نظر با استفاده از روشی مثل رواداری تعیین شده توسط کاربر برای نیروی محوری کنترل شود.
- در محدوده رواداری مشخص شده تا زمانیکه نیروی محوری برابر با صفر گردد، این روند را تکرار کنید. همگرایی یک نقطه \emptyset و M واحد و همچنین تنش‌های متناظر را در تمام لایه‌های مقطع عرضی ارائه می‌نماید (یعنی توزیع تنش). این محاسبات را برای دیگر انحناءها جهت دستیابی به تمام منحنی $M - \emptyset$ تکرار کنید.
- همانطور که می‌دانیم، برای این چنین برنامه‌هایی می‌توان هر مدل مصالحی را بکار برد. اگرچه اغلب مدل ساده الاستوپلاستیک کامل کافی می‌باشد. علاوه بر این، الگوریتم فوق‌الذکر را می‌توان برای در نظر گرفتن بارگذاری سیکلی، خمش دو محوره، نیروهای محوری غیر صفر، تنش پسماند و اشکال با مقطع عرضی نامتقارن اصلاح نمود.

۱-۱-۳- اثر برخی فاکتورها در رفتار خمشی غیر الاستیک

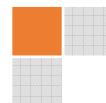
پهنه وسیعی از تحقیقات تجربی تایید نموده که ممان خمشی پلاستیک را می توان در تیرها گسترش داد. خلاصه برخی از این کارهای تجربی در (ASCE ۱۹۷۱) ارائه گردیده است. با توجه به کارهای تجربی این استنباط می شود که جهت توسعه ممان پلاستیک، قیود تعیین شده توسط فرضیاتی که در ابتدای بخش ۱-۱ ذکر شد، باید رعایت گردد. در ادامه عوامل دیگری که می تواند بر رفتار خمشی غیر الاستیک تاثیر بگذارد، بطور خلاصه مرور می شود.

۱-۱-۳-۱- تغییر در مشخصات مصالح

به دلیل اینکه ممان پلاستیک بطور مستقیم به تنش تسلیم فولاد بستگی دارد، در نظر گرفتن مقداری مناسب برای آن در محاسبات از اهمیت ویژه ای برخوردار است.

یک خطای بلقوه بحرانی این است که از مقدار گواهی تست کارخانه ای استفاده شود. کارخانه های تولید فولاد معمولاً از تست نمونه اولیه که در فرآیند تولید هر دسته از فولاد بکار می رود، استفاده می کنند (سایز یک دسته فولاد بسته به کارخانه های تولید متفاوت است ولی معمولاً به چندین تن می رسد). آزمایش نمونه اولیه برای تست، برای سطوح مختلف کرنش صورت می گیرد که معمولاً مقاومت تسلیم تا 300000 یا بیشتر بالا می رود. همچنین این آزمایش به منظور حصول اطمینان از اینکه تمام دسته ها مشخصات قابل قبولی دارند، انجام می شود. خواص فولادهای قرار گرفته در یک دسته که با حرارت یکسانی تولید می شوند، نیز دارای نوسان می باشد و گواهی تست کارخانه ای تنها در بهترین حالت می تواند برای تمام تناژ فولاد تولیدی در یک حرارت یکسان، یک مقدار را ارائه دهد. بنابراین استفاده از مقدار گزارش شده مبتنی بر گواهی تست کارخانه ای نامناسب و مملو از خطر می باشد؛ با توجه به گسیختگی های ساختمان ثابت شده است که یکی از دلایل اصلی در فروریزش وجود چنین خطاهایی می باشد (به عنوان مثال: Closkey, ۱۹۸۸).

مقاومت مشخصه تسلیم جهت طراحی سازه های جدید، مقداری است که می تواند استفاده شود. مهندسان با مفاهیم طراحی بر اساس حالات حدی [مانند: طراحی بر اساس حالات حدی انستیتو استاندارد کانادا (LSD)، طراحی بر اساس ضرایب بار و مقاومت انجمن سازه های فولادی آمریکا (LFRD) و غیره] آشنایی دارند و تغییرات ذاتی در پارامترهای مهندسی از جمله تغییر در مشخصات مصالح را درک می نمایند. این تغییرات معمولاً شامل ضرایب بار و مقاومت می شود. هرچند زمانیکه سازه ای تحلیل می شود، درک تغییر مقاومت تسلیم مقطع عرضی امری بسیار مهم می باشد. همانطور که قبلاً نیز اشاره شد، تست نمونه آزمایشی استاندارد (مانند تست استاندارد ASTM E6) جهت دستیابی به مقاومت تسلیم مصالح یک عضو فولادی بکار می رود. نتایج این تست می تواند بسته به اینکه نمونه آزمایشی از بال گرفته شده یا از جان، کاملاً متفاوت باشد. Galambos و Ravindra (۱۹۷۶) مقادیر متوسط تنش تسلیم برای نمونه های آزمایشی گرفته شده از بال ها و جان ها را به ترتیب ۵٪ و ۱۰٪ بیشتر از مقادیر مشخصه با ضریب تغییرات به ترتیب ۰٫۱۱ و ۰٫۱۰ گزارش دادند. این اتفاق تا حد زیادی به نتیجه رفتار مختلف جان و بال ها در طول فرآیند غلتیدن مرتبط می شود. در صفحات ضخیم تر و اعضای که کار کمتری روی آنها صورت گرفته و آهسته تر سرد می گردد، ساختار بلوری منسجم تری را ایجاد می کند و مشخصات مقاومت آنها کمتر تضعیف می شود. به همین ترتیب، تغییراتی بسته به ضخامت اشکال مورد توجه وجود دارد. در حقیقت، آلیاژهای خاصی به مقاطع بسیار ضخیم (مانند اشکال بال پهن که قبلاً به عنوان "مقاطع تنومند" شناخته می شد یا اشکال گروه ۴ و AISC 5 قبل از سال ۲۰۰۵) اضافه می شود که همان مقاومت تسلیم مقاطع نازک تر را برای ترکیب متالورژیکی معینی فراهم می کند. هنگامیکه کارخانه های تولید مقاطع فولادی برای جبران کاهش مقاومت تسلیم، ترکیب شیمیایی فولاد را اصلاح نمی کنند، جهت طراحی از مقاومت تسلیم کمتری استفاده می شود (مثلاً CISC, ۲۰۱۰).



۱-۳-۲- تنش های پسماند

بر خلاف آنچه که معمولاً در طراحی فرض می‌شود، یک عضو فولادی پیش از اعمال بارهای خارجی خالی از تنش نمی‌باشد. در واقع تنش‌های داخلی زیادی در حالت خود تعادل وجود دارد. این تنش‌ها معمولاً در طول فرآیند نورد گرم "مقید شده" هستند و تحت تاثیر عواملی همچون جوشکاری یا هرگونه عملیات حرارتی یا سردکاری می‌باشند. جهت درک منشأ این تنش‌های پسماند، فرآیند خنک شدن مقطع فولادی نورد شده باید در نظر گرفته شود. همچنین این مطلب که مدول الاستیسیته فولاد در حرارت‌های بالا دارای مقدار کمی است و به سرعت با کاهش دما تا ۱۰۰۰ درجه فارنهایت افزایش می‌یابد و (مشابه مصالح دیگر) به هنگام سرد شدن دچار افت و جمع‌شدگی می‌شود، نیز باید مورد توجه قرار گیرد.

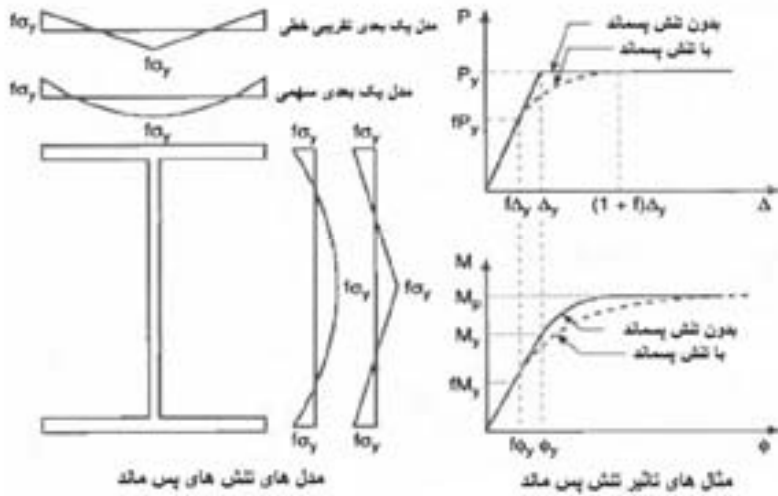
بنابراین هنگامیکه یک مقطع نورد شده با احاطه هوا سرد می‌گردد، ابتدا لبه بال‌ها از سه طرف با هوا محاصره می‌شود و سخت می‌گردد. اساساً جمع‌شدگی با مجاورت فولاد نرم‌تر مقید نمی‌گردد. با این وجود، چنانکه فرآیند سرد کردن در امتداد بال‌ها پیشرفت کند، لبه بال‌ها که تا حدودی قبلاً سرد شده‌اند و مقداری سختی بدست آورده‌اند، یک مهار نسبی را در مقابل جمع‌شدگی مصالح مجاور بال فراهم می‌سازند. از اینرو لبه بال‌ها، در فشار و مصالح سرد شده مجاور، در کشش قرار دارند. چنانچه فرآیند سرد شدن در امتداد بال‌ها ادامه یابد، این فرآیند تکرار می‌گردد و تمام مصالحی که قبلاً سرد و سخت شده بودند، توسط فولاد مجاور که شروع به سرد شدن کرده‌اند، تحت فشار قرار می‌گیرند. در نتیجه لبه بال‌هایی که ابتدا سرد شده‌اند، بیشترین فشردگی را خواهند داشت. مصالح هسته بال-جان که از همه طرف با فولاد احاطه شده و به آرامی سرد می‌شوند، در معرض بیشترین تنش‌های کششی داخلی قرار خواهند گرفت.

اعضایی مانند صفحات نازک فولادی که می‌تواند به سرعت سرد شود، در معرض بیشترین مقدار تنش‌های پسماند که گاهی اوقات این مقدار از تنش تسلیم نیز فراتر می‌رود، قرار دارند. هرچند در اکثر مقاطع فولادی نورده شده تنش‌های پسماند ماکزیمم تقریباً ۳۳٪ تنش تسلیم می‌باشد.

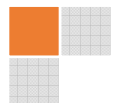
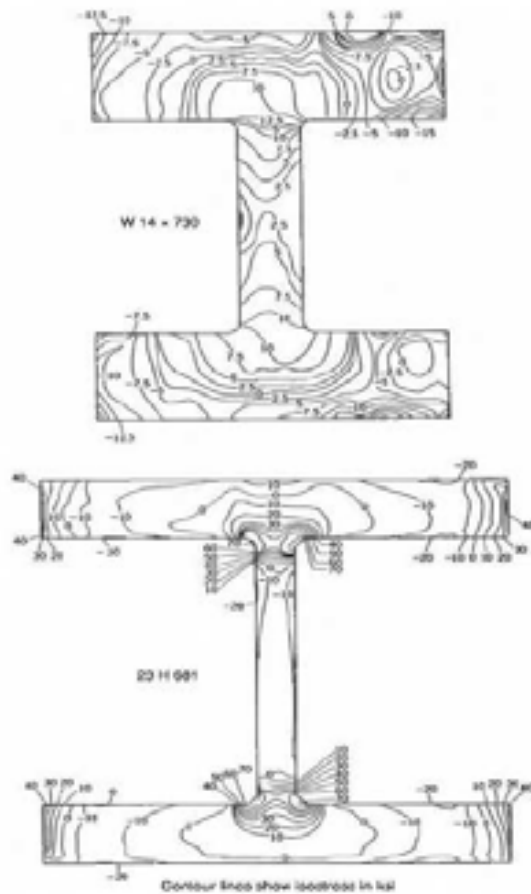
مطابق با چنین منطقی نشان داده می‌شود که جوشکاری چگونه موجب تولید تنش‌های پسماند می‌شود. چنانکه جوشکاری صورت پذیرد، فرآیندهای سرد شدن و جمع‌شدگی فلز جوش و فولاد در ناحیه تحت تاثیر حرارت، با مصالح فولادی هم‌جوار مقید می‌گردد. بنابراین متعاقب جوش کاری، جوش‌ها در کشش خواهند بود. همچنین الگوی تنش پسماند موجود در فلز پایه بطور موضعی تحت تاثیر عملیات جوشکاری می‌باشد.

تنش‌های پسماند خود تعادل با استفاده از تغییرات خطی تنش‌ها در امتداد بال‌ها و جان در شکل ۱-۴ به صورت شماتیک نشان داده شده است. همچنین جهت مقایسه، توزیع تنش پسماند واقعی در یک مقطع فولادی در شکل ۱-۵ نیز ارائه شده است. به دلیل آنکه ساختار یکپارچه اثرات آنها، هیچ نیروی محوری یا ممانی در مقطع عرضی تولید نمی‌کنند، تنش‌های داخلی در حالت خود تعادلی قرار دارند.

اگرچه تنش‌های پسماند می‌توانند بزرگ باشند، ولی اثری بر ممان پلاستیک مقطع عرضی ندارند. به عنوان مثال، شکل ۱-۴ را در نظر بگیرید که در آن فرض می‌شود، مقدار تنش‌های پسماند نصف تنش تسلیم باشد. هنگامیکه مقطع در معرض بارگذاری محوری خالص در فشار قرار دارد، لبه بال‌ها تنها در نصف بار محوری اعمالی به تنش تسلیم خود می‌رسند که اگر تنش‌های پسماند وجود نداشته باشند، تسلیم‌شدگی کامل مقطع عرضی رخ می‌دهد. از آن نقطه به بعد، پلاستیک-شدگی در تمام مقطع عرضی شروع خواهد شد. اصولاً بواسطه آنکه هر نقطه منفرد سطح مقطع از تنش اولیه متفاوتی نشأت می‌گیرد، می‌بایستی در معرض درجه بزرگی مختلفی از کرنش (پیش از رسیدن به تنش تسلیم) قرار گیرد.



شکل ۱-۴- نمایش شماتیک تنش های پسماند خود تعادل در شکل سازه های بال پهن



شکل ۱-۵- توزیع دو بعدی تنش های پسماند در اشکال سازه های بال پهن جوش شده و نورد شده (از $L. Tall$ طراحی فولاد سازه های، ویرایش دوم، ۱۹۷۴)

نهایتاً، زمانیکه کرنش اعمالی ۵۰٪ بیشتر از مقدار مورد نیاز پلاستیک شدن همان مقطع بدون تنش های پسماند گردد، نواحی هسته بین بال و جان از آخرین نقاط تسلیم شدگی خواهند شد. در واقع دیاگرام نیرو-افزایش طول مشابه آنچه که در شکل ۱-۴ نشان داده شده است، معمولاً به جای استفاده از نمونه های آزمایشی استاندارد مصالح، با انجام آزمایش بر نمونه های تته-ستون (*stub-column test*) در فشار محوری (یا کشش) بدست می آید.

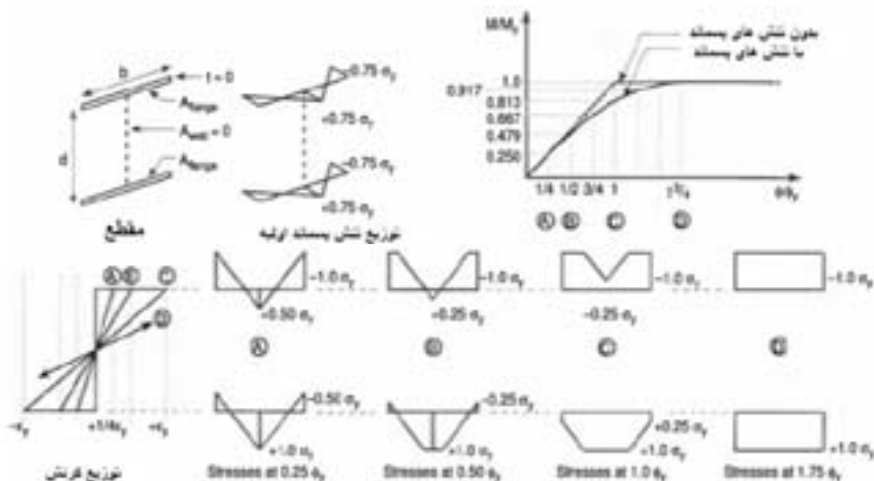
اگر همان مقطع عرضی به جای نیروی محوری در معرض خمش قرار گیرد، تسلیم شدگی در ممانی برابر با نصف M_y با گسترش پلاستیک شدگی از لبه بال ها به سمت داخل برای بال های تحت فشار و از هسته-بال به سمت بیرون برای بال های تحت کشش شروع می شود. همچنین اگر بال ها در معرض فشار و کشش بزرگتری قرار گیرند، ممان خمشی نیز افزایش می یابد. هرچند که ممان پلاستیسیته تغییر نمی کند و همان M_p باقی می ماند. جهت تفهیم بیشتر مثال زیر با جزئیات بیشتر ارائه شده است.

اگرچه تنش های پسماند بر مقاومت اعضا تاثیری ندارند، اما نرم شدگی شتاب زده منحنی های نیروی محوری در مقابل تغییر شکل محوری یا ممان در مقابل انحناء و همچنین وقوع آن قبل از فرآیند تسلیم بر خیزهای عضو و مقاومت های کم انشی تاثیر دارد. در ضمن عبارات تحلیلی که در آیین نامه ها و استانداردهای طراحی فولاد جهت محاسبه پایداری و مقاومت اعضای سازه ای بکار می رود، در نظر گرفته شده است.

۱-۳-۳- مثال: مقطع بال پهن ایده آل با تنش های پسماند

یک مقطع بال پهن "ایده آل" جهت مقاومت در برابر خمش دارای بال هایی با ضخامت ناچیز و مساحت A_f ، ارتفاع d و جان آن نیز مساحت ناچیزی دارد (شکل ۱-۶). ضریب شکل برای این مقطع برابر با یک و ممان پلاستیک آن برابر با $M_p = dA_f \sigma_y$ می باشد. در این مقطع فرض می شود، تنش های پسماند اولیه توسط فرآیند نورد به وجود می آید (قبل از اعمال هرگونه بار خارجی) و حداکثر مقدار آن در لبه بال ها (در فشار) و در تقاطع با جان (در کشش) برابر با $0.75\sigma_y$ است که به صورت خطی در بین این دو تغییر می کنند. همچنین فرض می شود که مصالح در حالت الاستوپلاستیک کامل قرار دارد. منحنی های $M - \theta$ در حالت اولیه بدون تنش و همچنین حالتی که تنش های پسماند حضور دارند، رسم می گردد. برای این منظور اگرچه روابط تحلیلی دقیقی را می توان بدست آورد، ولی در اینجا جهت ساده سازی، حل با محاسبه نقاطی که عیناً در این منحنی ها رسم می شود، بدست می آید.

با استفاده از اصل جمع آثار قوای تنش و آگاهی از تنش های جدید اعمالی و کرنش های مرتبط با آن در هر نقطه از مدل الاستوپلاستیک کامل، می توان شکل ۱-۶ را تولید نمود. در این شکل در رسم برآیند ممان-شیب هنگامی که مقطع عرضی بدون تنش پسماند در نظر گرفته می شود، از خط چین استفاده می گردد. در این شکل θ_y و ϵ_y به ترتیب انحناء و ماکزیمم کرنش در شروع تسلیم شدگی (که در این مثال به M_p می رسد) می باشد. منحنی برآیند $M - \theta$ برای این مقطع عرضی با ضریب شکل واحد، دو خطی می باشد.



شکل ۶-۱- رفتار خمشی پلاستیک شکل سازه‌ای ایده‌آل با تنش‌های پسماند

برآورد منحنی $M - \theta$ برای حالتی که تنش‌های پسماند داریم، بسیار قابل توجه می‌باشد. مرحله A پایان محدوده الاستیک را نشان می‌دهد؛ به دلیل اعمال یکنواخت کرنش‌هایی برابر با $\epsilon_y/4$ به مقطع عرضی تنش‌هایی به اندازه $\sigma_y/4$ به بال‌ها به صورت یکنواخت اضافه می‌شود. این امر موجب تسلیم‌شدگی در نقاطی که مقدار تنش‌های پسماند آنها $0.75 \sigma_y$ است، می‌گردد. مقادیر ممان‌ها و انحناء در ضربی از این انحناء محاسبه می‌شود. برآیند کرنش‌ها، تنش‌ها و منحنی $M - \theta$ (خط توپور) در شکل ۶-۱ ارائه شده است. به عنوان مثال، ممان برای حالت ج که حالت میانی است، با در نظر گرفتن انحناء θ مطابق با دیاگرام تنش به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$M_{stage-c} = 2 \left[2 \left(\frac{A_f}{4} \sigma_y + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_y}{4} + \sigma_y \right) \frac{A_f}{4} \right) \frac{d}{2} \right] = 0.8125 A_f d \sigma_y = 0.8125 M_p \quad (15-1)$$

۱-۳-۴- ناپایداری‌های موضعی

انحناء پلاستیک را نمی‌توان به صورت نامحدود افزایش داد و در نهایت کمناش موضعی یا کمناش پیچشی جانبی رخ می‌دهد. هنگامی که مدول مقطع مماسی سخت‌شدگی کرنشی به نحو فزاینده‌ای کاهش یابد (در عین حالی که کرنش‌های پلاستیک افزایش می‌یابند). بنابراین لازم به ذکر است که آگاه باشیم که در اعضاء سازه ای تحت فشاری که به محدوده پلاستیک می‌رسند، نهایتاً کمناش موضعی رخ می‌دهد (مانند بال در تیرهایی با بال پهن که در سازه‌ها به طور معمول مورد استفاده قرار می‌گیرند). با بکارگیری روش‌های طراحی پلاستیک، به سادگی محدودیت‌های ضخامت-بال بیشتری برای به تاخیر انداختن کمناش موضعی در نظر گرفته می‌شود. این محدودیت‌ها این اطمینان را حاصل می‌کند که توسعه تغییرشکل-های بزرگ پلاستیک در محدوده قابل انتظار در کاربردهای معمولی رخ دهد.

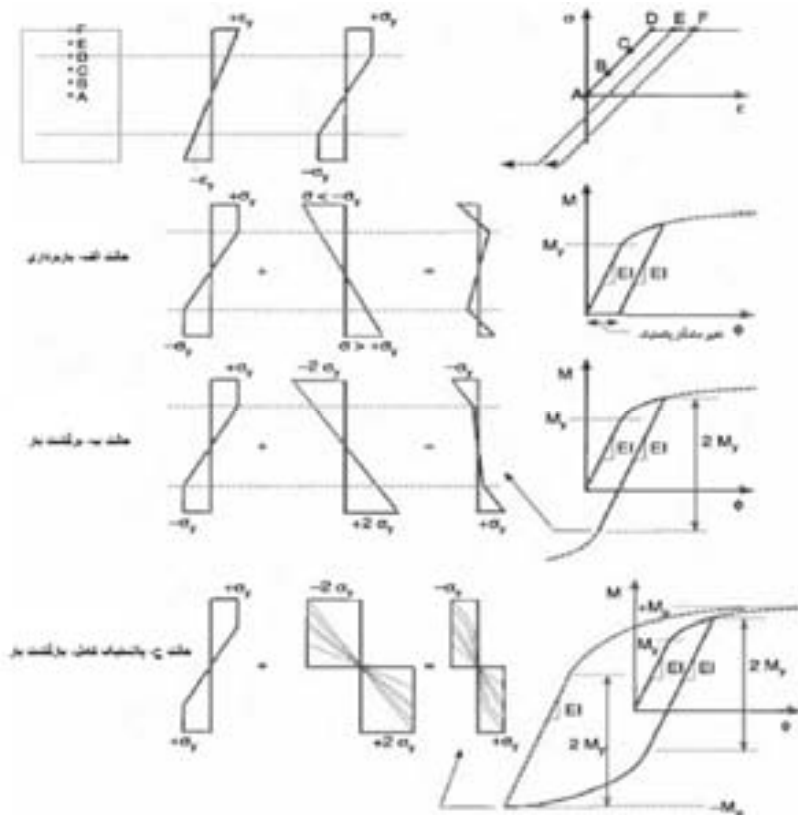
۱-۳-۵- سخت‌شدگی کرنشی

بکارگیری مدل‌هایی مانند مدل الاستوپلاستیک کامل که اثر سخت‌شدگی کرنشی را نادیده می‌گیرند، بسیار ساده‌تر هستند و به ویژه برای محاسبات دستی بسیار سودمند می‌باشند. در نظر گرفتن اثر سخت‌شدگی کرنشی معمولاً امکان‌پذیر است، ولی نیاز به تلاش‌های محاسباتی مضاعف دارد. همچنین ثابت شده است تا زمانیکه بحث مقاومت عضو مسئله‌ای است که موجب نگرانی می‌شود، معمولاً نادیده گرفتن آن در تیرهایی که در معرض تغییرات ممان قرار دارند، محافظه‌کارانه می‌باشد.

تأثیر سخت‌شدگی کرنشی بر محاسبات دوران پلاستیک می‌تواند قابل توجه‌تر باشد. برای حالت خاصی که تیرها در معرض ممان‌های یکنواختی قرار دارند (که پلاستیک‌شدگی بطور همزمان در بالای تمام منطقه‌ای که تحت ممان یکنواخت قرار دارد، رخ می‌دهد)، در نظر گرفتن سخت‌شدگی کرنشی در چنین تیرهایی که معمولاً کماتش موضعی در اولین سخت‌شدگی کرنشی رخ می‌دهد، فوایدی را به همراه دارد.

۴-۱-۱- رفتار طی بارگذاری سبکی

کاربرد اصلی مفاهیم تحلیل پلاستیک در طراحی سازه‌های مقاوم در برابر زلزله یافت می‌شود. در نتیجه بررسی اثر بارگذاری سبکی بر یک مقطع که بطور کامل و یا تا حدی پلاستیک شده است، بسیار مهم است. کلید درک رفتار پلاستیک یک مقطع عرضی این است که یک سری از لایه‌هایی از مصالح در نظر گرفته شود. تمام لایه‌های مصالح باید با قوانین مذکور مدل مصالح باقی بمانند، اما هر لایه به صورت متفاوتی کشیده می‌شود. بنابراین تاریخچه تنش نیز متفاوت خواهد بود. برای مثال، در شکل ۷-۱ نقاط الف تا و به نقاط مختلف در امتداد ارتفاع یک مقطع عرضی مستطیلی که در معرض ممانی بزرگتر از ممان تسلیم M_y و کوچکتر از ممان پلاستیک M_p است، اختصاص داده می‌شود. هنگامیکه ممان اعمالی حذف و یا به عبارتی ممان اعمالی بر دیگرام $M - \theta$ صفر می‌گردد، در واقع مقطع عرضی باربرداری می‌شود و همچنین تمام لایه‌ها به صورت استاتیکی مطابق با مدل المان الاستوپلاستیک باربرداری می‌شوند. در حقیقت یک لایه معمولاً تا زمانیکه تنش به سطح تسلیم در مخالف جهت $\sigma_y -$ نرسد، به صورت استاتیکی باربرداری می‌گردد. بنابراین، ابتدا باید تلاش گردد که به صورت استاتیکی ممان اعمالی همانند حالت الف از شکل ۷-۱ حذف گردد.



شکل ۷-۱- مثال رفتار پلاستیک سبکی مقطع عرضی

اگر هیچکدام از تنش‌ها در دیاگرام برآیند تنش، از تنش تسلیم فراتر نرود، راه حل قابل قبول تلقی می‌شود. توجه داریم که اگرچه بار اعمالی خارجی حذف شده است، ولی در حالت خود تعادل دیاگرام تنش پسماند داخلی ایجاد شده است. علاوه بر این، با توجه به دیاگرام $M - \emptyset$ می‌توان مشاهده کرد که منحنی پسماند باقی می‌ماند. جهت برآورد بزرگای این منحنی می‌توان ماکزیمم انحناء حاصل از فاز اولیه بارگذاری (برای مقاطع مستطیلی می‌توان از معادله ۱-۹ استفاده کرد) را محاسبه کرد و سپس از این مقدار انحنائی که نظیر ممان حذف شده با فرض پاسخ پلاستیک می‌باشد را کم کرد (با استفاده از معادله ۱-۴ که انحناء برابر با $\emptyset = M/EI$ می‌باشد). به دلیل اینکه این دو مقدار کاملاً متفاوت می‌باشند، باید یک انحناء پسماند باقی بماند.

با توجه به استدلال بیان شده در بالا، همانطور که در حالت ب از شکل ۱-۷ مشاهده می‌شود، برای هر مقطع عرضی که ابتدا تحت تنش M_y قرار دارد، این امکان وجود دارد که ممانی به اندازه $2M_y$ بدون اینکه تنش از مقدار تسلیم در دیاگرام تنش برآیند فراتر رود، به صورت استاتیکی حذف شود. در واقع مقطع می‌تواند در داخل این محدوده $2M_y$ بدون اینکه پلاستیک‌شدگی جدیدی را تولید کند، در معرض تاریخچه‌های بارگذاری چرخشی قرار گیرد. این معادل داشتن یک محدوده الاستیک جدید است که با تفاوت بین M و M_y به سمت بالا منتقل می‌شود. با این حال به محض اینکه بارگذاری در این مرزها افزایش یابد، تسلیم‌شدگی جدیدی رخ می‌دهد و تاریخچه تنش-کرنش هر لایه باید جهت تعیین توزیع واقعی تنش در سراسر مقطع عرضی مشخص شود. جهت تعیین این پروفیل تنش، روش مورد استفاده در مثال تنش‌های پسماند در بخش قبلی را می‌توان بکار گرفت. اما افسست تولید شده توسط منحنی پسماند در ممان صفر باید محاسبه گردد. در نهایت همانطور که در حالت ج از شکل ۱-۷ نشان داده شده است، ممان ماکزیمم $-M_p$ بدست آورده می‌شود. این روند را می‌توان با چرخش بارگذاری و سیکلی نیز تکرار کرد، بنابراین منحنی‌های هیستریسیس $M - \emptyset$ تولید می‌شود.

بطور کلی رفتار شکل‌پذیر اعضاء فولادی تا زمانیکه ناپایداری موضعی رخ دهد، توسعه خواهد یافت. این امر به دلیل افزایش بیش از حد کرنش تحت بارگذاری غیر سیکلی یا شکست تحت پلاستیک شدن متناوب می‌باشد (یعنی خستگی سیکل پایین تحت بارگذاری غیر الاستیک سیکلی).

۱-۲- بارگذاری ترکیبی خمشی و محوری

در بخش ۱-۱ فرض شد که هیچ بار محوری خارجی بر مقطع عرضی اعمال نمی‌شود. با این حال در بسیاری از موارد این فرض نادرست خواهد بود و بررسی اینکه حضور بار محوری چه تاثیری بر ممان پلاستیک دارد، ضروری می‌باشد. همان مفاهیم اساسی و مدل‌سازی که قبلاً ارائه گردید، در اینجا نیز اعمال می‌شود: توزیع خطی کرنش‌ها در سراسر مقطع عرضی عضو با استفاده از مدل الاستوپلاستیک به تنش‌ها مرتبط می‌شود و ممان‌ها و نیروهای محوری با انتگرال‌گیری تنش‌های اعمالی بر مقطع عرضی بدست می‌آید (یا به عبارت ساده‌تر با استفاده از نیروهای تنش-برآیند). شکل ۱-۸ چگونگی تغییرات دیاگرام تنش به عنوان ممان اعمال شده را نشان می‌دهد که به صورت پیشرونده برای نیروی محوری داده شده افزایش می‌یابد.

محاسبه ممان پلاستیک کاهش یافته M_{pp} در حالت پلاستیک‌شده کامل برای بار محوری P یک عملیات ساده می‌باشد. بطور مستقیم، تعادل نیروهای افقی وارد بر مقطع عرضی به صورت زیر است:

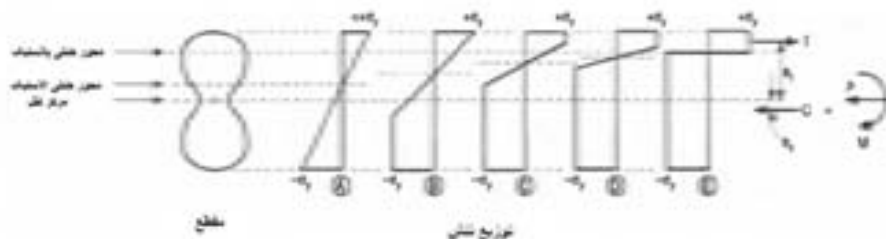
$$P = C - T = A_{compression} \sigma_y - A_{tension} \sigma_y = (A_{compression} - A_{tension}) \sigma_y \quad (1-16)$$

با توجه به اینکه جمع $A_{compression}$ و $A_{tension}$ باید با کل مساحت مقطع عرضی A باشد، می‌توان بطور مستقیم محل قرائگیری محور خنثی؛ نیروهای برآیند-تنش C و T و ممان پلاستیک کاهش‌یافته متناظر؛ M_{pp} را بدست آورد. با تکرار این روند برای نیروهای محوری که از صفر تا بار پلاستیک محوری ($A\sigma_y$) تغییر می‌کند، می‌توان برای

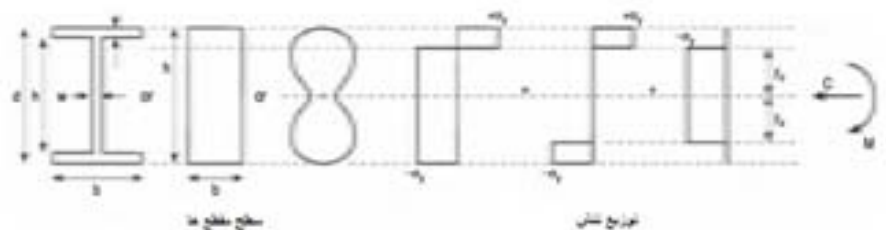
مقطع داده شده دیاگرام اندرکنش را رسم کرد. روش دیگر، بکارگیری راه حل های با فرم بسته^۱ برای ساده ترین مقاطع عرضی می باشد.

برخی از این راه حل های با فرم بسته در اینجا ارائه می شود. همچنین بهتر است مطابق با شکل ۱-۹، دیاگرام تنش پلاستیک شده کامل برای پاسخ ترکیبی خمشی-محوری را به دو قسمت توزیع ممان و نیروی محوری خالص تقسیم کرد. برای راحتی کار، برای مقاطع عرضی مختلف، این شکل با استفاده از همان موقعیت دلخواه قرارگیری محور خنثی توسعه داده می شود؛ بدین معنی که برای این حالت کلی پلاستیک کامل، بارهای محوری و ممان های متناظر متفاوتی برای هر مقطع عرضی بدست آورده شده است. با این وجود اصل اساسی تغییری نمی کند: زمانیکه موقعیت قرارگیری محور خنثی فرض می شود، عبارات می توانند برای نیروی محوری اعمال شده و ممان پلاستیک کاهش یافته متناظر توسعه یابد که در تمام و یا در قسمت هایی از عمق مقطع اعتبار دارند. با استفاده از تقلب جبری، توسعه معادلات برای دیاگرام های اندرکنش که نیروی محوری اعمالی را به عنوان تابعی از ممان پلاستیک کاهش یافته بیان می کنند، نیز امکان پذیر است. اگرچه بعضی اوقات این روش بسیار ملال آور می باشد.

در اینجا این معادلات برای برخی از مقاطع ساده ای که دو محور تقارن دارند و محور خنثی آنها در فاصله ی y در بالای مرکز هندسی قرار دارد، توسعه داده می شود.



شکل ۱-۱- دیاگرام های تنش به عنوان توسعه پلاستیک در یک مقطع عرضی در معرض بارگذاری ترکیبی محوری و خمشی



شکل ۱-۲- وضعیت کاملاً پلاستیک برای موقعیت دلخواه فایبر خنثی

۱-۲-۱- مقطع عرضی مستطیلی

اگر دیاگرام تنش در شکل ۱-۹ به هم پیوستگی خمشی و محوری خالص تقسیم گردد، برآیند نیروی محوری برابر است با:

$$\left[\frac{P}{P_y} \right] = \left[\frac{(P = \tau \pi y \cdot \sigma_y)}{(P_y = h b \sigma_y)} \right] = \frac{\tau y}{h} (17-1)$$

که در آن، ظرفیت محوری مقطع عرضی در حالت پلاستیک شده کامل و سایر پارامترهای هندسی در بخش ۹-۱ تعریف شده است.

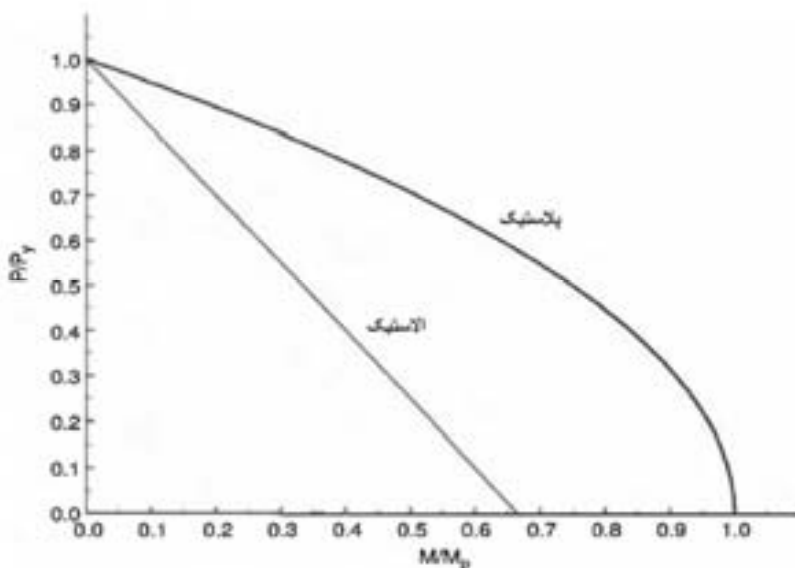
اگر ممان پلاستیک مقطع در عمق $2y$ (به عبارت دیگر وقتی فرض شود، قسمتی از مقطع عرضی در مقابل بار محوری P مقاومت می کند) از ممان پلاستیک (یعنی مقاومت خمشی در فقدان بار محوری) کم شود، این عبارت را می توان برای ممان پلاستیک کاهش یافته به صورت زیر توسعه داد:

$$M_{pr} = Z\sigma_y - Z_y \cdot \sigma_y = \left[\left(\frac{bh^2}{4} \right) - \left(\frac{b(2y)^2}{4} \right) \right] \sigma_y = \frac{b(h^2 - 4y^2)}{4} \sigma_y \quad (18-1)$$

با فرمتی نرمال شده و در معادله ۱۷-۱ جایگذاری می شود:

$$\frac{M_{pr}}{M_p} = \frac{b(h^2 - 4y^2)\sigma_y}{4bh^2\sigma_y} \left(\frac{4}{bh^2\sigma_y} \right) = 1 - \frac{4y^2}{h^2} = 1 - \left(\frac{P}{P_y} \right)^2 \quad (19-1)$$

دیاگرام برآیند اندرکنش در شکل ۱۰-۱ رسم شده است. توجه داریم که برای یک مقطع عرضی مستطیلی تفاوت قابل توجهی بین منحنی اندرکنش الاستیک، هنگامیکه هیچگونه کرنشی به کرنش تسلیم اضافه نمی شود، با منحنی اندرکنش پلاستیک که در بالا بدست آمده است، وجود دارد.



شکل ۱۰-۱- دیاگرام اندرکنش نرمال شده پلاستیک $M-P$ برای یک مقطع عرضی مستطیلی

۱-۲-۲- مقاطع بال پهن: خمش حول محور قوی

برای مقاطع بال پهن (مقاطعی که ضخامت بال ثابتی دارند)، راه حل با فرم بسته با توجه به اینکه محور خنثی در جان ($y \leq h/2$) یا در بال ($h/2 < y < d/2$) قرار بگیرد، بسیار متفاوت است. برای حالت اول:

$$\left[\frac{P}{P_y} \right] = \left[\frac{(P=2y \cdot w\sigma_y)}{(P_y=A\sigma_y)} \right] = \frac{2y \cdot w}{A} \leq \frac{A_w}{A} \quad (20-1)$$

که در آن، A مساحت کل مقطع عرضی ($=2bh + bh$) و A_w مساحت جان ($=wh$) می باشد. بدین ترتیب ممان پلاستیک کاهش یافته به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$M_{pr} = Z\sigma_y - Z_y \cdot \sigma_y = \left[Z - \left(\frac{w(2y)^2}{4} \right) \right] \sigma_y = (Z - wy^2)\sigma_y \quad (21-1)$$

سپس جهت بدست آوردن منحنی اندرکنش نرمال شده $M-P$ ، معادله بالا بر M_p تقسیم می گردد و نتیجه معادله ۲۰-

۱ جایگزین می شود:

$$\frac{M_{pr}}{M_p} = 1 - \left(\frac{Z_y}{Z}\right) = 1 - \left(\frac{wy}{Z}\right) = 1 - \left(\frac{P}{P_y}\right)^2 \frac{A^2}{4I} \text{ برای } \frac{P}{P_y} \leq \frac{A_w}{A} \quad (22-1)$$

هنگامیکه محور خنثی در بال می افتد، با استفاده از روشی مشابه عبارت زیر بدست می آید:

$$\frac{M_{pr}}{M_p} = A \left(1 - \frac{P}{P_y}\right) \left[d - \frac{A}{4I} \left(1 - \frac{P}{P_y}\right) \right] \left(\frac{1}{4I}\right) \text{ برای } \frac{P}{P_y} > \frac{A_w}{A} \quad (23-1)$$

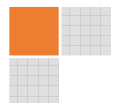
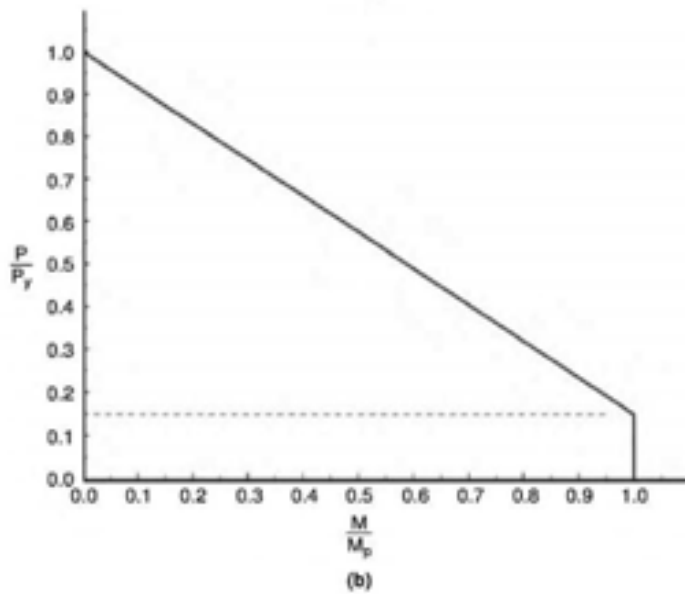
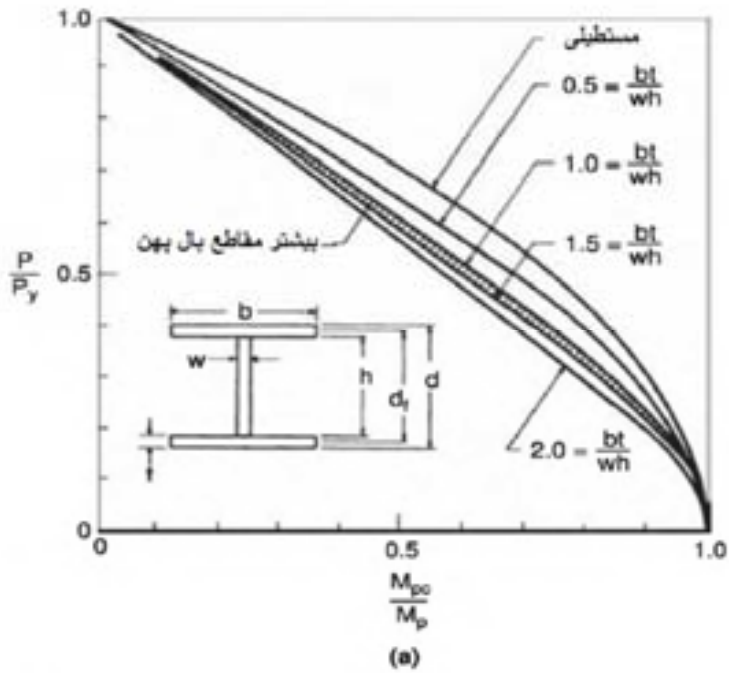
باید این نکته را در نظر داشته باشیم، وقتیکه نیروی محوری از ۳۰٪ مقدار پلاستیک آن تجاوز کند، معمولاً کاهش در ظرفیت ممان برای این اشکال سازه ای کمتر از ۱۰٪ می باشد. برای متداول ترین مقاطع بال پهن موجود، منحنی اندرکنش نرمال شده $M-P$ تابعی از نسبت مساحت جان به مساحت کل مقطع عرضی می باشد (که به طریقی دیگر می تواند به صورت مساحت جان به مجموع مساحت بال ها یا به صورت های دیگر بیان گردد). به عنوان مثال، این مساحت با توسعه عبارت نرمال نشده معادله ۱-۲۲ به صورت زیر بیان می شود:

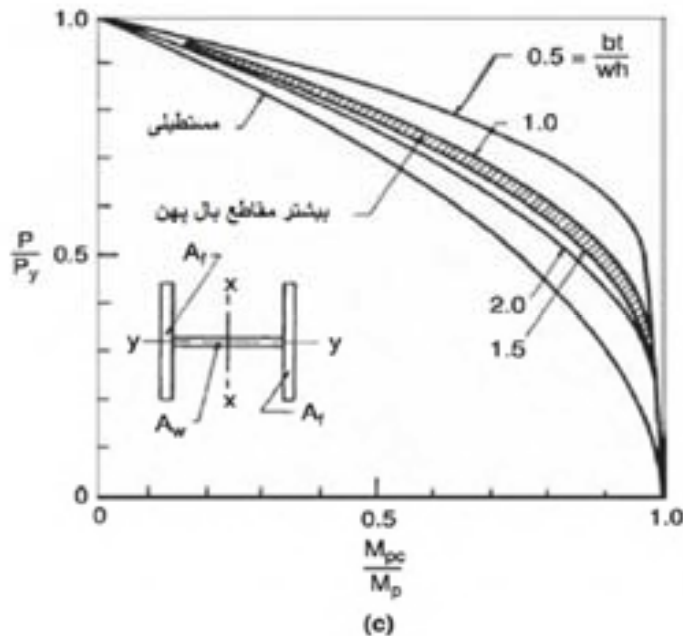
$$\frac{A^2}{4I Z_y} = \frac{A^2}{4I \left(\frac{wh^2}{12} + \frac{A_f(d-t)}{2}\right)} = \frac{A^2}{A_w^2 + 2A_f(A_w + tw)} = \frac{1}{\left(\frac{A_w}{A}\right)^2 + \left(\frac{2A_f A_w}{A^2}\right) + \left(\frac{2A_f tw}{A^2}\right)} \quad (24-1)$$

که در آن، A_f مساحت کل بال (یعنی؛ مجموع مساحت های هر دو بال) می باشد. مشاهده ساده یا محاسبه با سعی و خطا، اهمیت ناچیز عبارت سوم مخرج بر برآیند منحنی اندرکنش نرمال شده $M-P$ را نشان می دهد. این عبارت برای نسبت مساحت جان به بال داده شده، مقدار غیر ثابت منحصر به فردی می باشد. در نتیجه منحنی های نرمال شده اندرکنش را مطابق با شکل ۱-۱۱ الف می توان به راحتی به عنوان تابعی از نسبت مساحت بال به جان بیان کرد.

همانطور که انتظار می رود، با توجه به شکل ۱-۱۱ الف می توان مشاهده کرد، منحنی های نرمال شده اندرکنش $M-P$ مقاطع بال پهن که کمترین نسبت مساحت بال به جان را دارند، به منحنی مقطع عرضی مستطیلی که در قبل بدست آمده بسیار نزدیک است. اگرچه این مشاهده برای نشان دادن رفتار فیزیکی نسبی مقاطع عرضی مختلف مفید است، اما باید یادآوری شود که اشکال مستطیلی فولادی به رغم داشتن محدوده پلاستیک گسترده تر، به صورت ناکارآمدی از مصالح استفاده می کند که مطلوب نمی باشد. در نهایت، همانطور که می دانیم مقاطع بال پهن معمولاً با نسبت ثابتی از مساحت بال به جان نورد می شود که عموماً بین ۲ و ۳ است، که تقریباً مطابق با ناحیه هاشور خورده شکل ۱-۱۱ الف می باشد. همچنین توسعه مطلوب و قابل اطمینان منحنی اندرکنش طراحی $M-P$ را برای مقاومت پلاستیک مقاطع عرضی بال پهن در خمش حول محور قوی امکان پذیر ساخته است که در شکل ۱-۱۱ ب نشان داده شده است و به صورت زیر بیان می گردد:

$$\left(\frac{M}{M_p}\right)_{(25-1)} = 1.18 \left(1 - \frac{P}{P_y}\right) \leq 1.0$$





شکل ۱-۱۱- دیاگرام‌های اندرکنش نرمال شده پلاستیک $M-P$: الف) برای شکل سازه‌های بال پهن، خمش حول محور قوی؛ ب) منحنی اندرکنش ساده شده طراحی برای شکل سازه‌های بال پهن، خمش حول محور قوی؛ ج) برای شکل سازه‌های بال پهن، خمش حول محور ضعیف (اشکال الف و ج برگرفته از راهنمای ۴۱۰۰۰۰۰ می‌باشد)
۱-۲-۳- مقاطع بال پهن: خمش حول محور ضعیف

معادلات اندرکنش نرمال شده $M-P$ را می‌توان برای مقاطع بال پهن که تحت خمش حول محور ضعیف خود هستند، با روشی مشابه که در بخش قبلی برای خمش حول محور قوی ارائه گردید، بدست آورد. دو مورد بسته به اینکه محور خنثی در جان $(y \leq w/2)$ بیافتد یا در بال $(w/2 \leq y \leq b/2)$ باید در نظر گرفته شود. برای حالت اول:

$$\frac{M_{pr}}{M_p} = 1 - \left(\frac{P}{P_y}\right)^2 \frac{A^2}{4Z_y} \text{ برای } \frac{P}{P_y} \leq \frac{wd}{A} \quad (26-1)$$

و برای حالت دوم:

$$\frac{M_{pr}}{M_p} = \left[\frac{4Z_y}{A} - \left(1 - \frac{P}{P_y}\right) \right] \left(1 - \frac{P}{P_y}\right) \left(\frac{A^2}{4Z_y}\right) \text{ برای } \frac{P}{P_y} > \frac{wd}{A} \quad (27-1)$$

منحنی اندرکنش نرمال شده $M-P$ برای اکثر مقاطع بال پهن موجود، باز هم تابعی از نسبت مساحت بال به مساحت جان است. منحنی‌های اندرکنش نرمال شده به عنوان تابعی از این نسبت در شکل ۱-۱۱-ج نشان داده شده است. این بار در خمش حول محور ضعیف به دلیل شکل مقاطع بال پهن، دو مقطع عرضی مستطیلی به سادگی در مرکز ثقل خود توسط یک عضو باریک بهم پیوسته‌اند. همچنین مقاطع بال پهنی که بیشترین نسبت مساحت بال به جان را دارند، منحنی‌های اندرکنش آنها مطابق با شکل ۱-۱۱-ج به مقطع مستطیلی نزدیکتر است. منطقه هاشور خورده در شکل محدوده نسبت‌های مساحت بال به جان متناظر با اکثر مقاطع بال پهن نورد شده که امروزه بکار می‌رود را نشان می‌دهد. بر اساس این مشاهدات، عبارت منحنی طراحی اندرکنش زیر برای مقاومت پلاستیک مقاطع بال پهنی که تحت خمش حول محور ضعیف خود قرار دارند، به صورت زیر پیشنهاد داده می‌شود:

$$\frac{M}{M_p} = 1.19 \left[1 - \left(\frac{P}{P_y} \right)^2 \right] \leq 1.0 \quad (28-1)$$

هرچند در برخی از موارد ساده تر است، اما معادلات محافظه کارانه تری در برخی از آیین نامه های طراحی استفاده شده است (به عنوان مثال: CSA، ۲۰۰۹).

۱-۲-۴- روابط ممان-شیب

اگر رابطه ممان-شیب کامل برای یک بار محوری و مقطع عرضی داده شده مورد نظر باشد، بکارگیری تکنیک های عددی توصیه می شود، حتی اگر برخی از راه حل های با فرم بسته بتواند برای ساده ترین مقاطع عرضی توسعه پیدا کند. در واقع برای ترکیب بارگذاری محوری و خمشی تنها تغییرات کمی برای تشریح الگوریتم ممان-شیب در بخش قبلی لازم است.

۱-۳- بارگذاری ترکیبی خمشی و برشی

اندرکنش بین نیروی محوری و ممان به دلیل آنکه منجر به ایجاد کرنش های محوری در یک عضو سازه ای می گردند، به سادگی در بخش پیشین در نظر گرفته شد. با این وجود قبل از اینکه ترکیب اثر بارگذاری خمشی و برشی بر ممان پلاستیک یک مقطع عرضی در نظر گرفته شود (هنگامیکه تسلیم شدگی رخ می دهد)، ابتدا باید اندرکنش بین تنش های برشی و محوری شرح داده شود. بر اساس مشاهدات تجربی، برای شرح رفتار اساسی مصالح دو قانون مقاومت مصالح؛ معیارهای تسلیم ترسکا و فون میزس فرمول بندی شده است (Popov، ۱۹۶۸). حالت دوم بطور گسترده برای تشریح جنبه های رفتاری سازه های فولادی بکار گرفته می شود. معیار فون میزس به صورت زیر بیان می شود:

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_y^2 \quad (29-1)$$

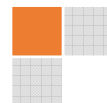
که در آن، σ تنش محوری، τ تنش برشی و σ_y تنش تسلیم در کشش تک محوره می باشد.

با توجه به این معیار: (۱) هنگامیکه تنش های محوری به نقطه تسلیم می رسد، هیچگونه تنش برشی τ را نمی توان اعمال کرد و (۲) در غیاب تنش های محوری، تنش برشی تسلیم τ_y برابر با $0.577\sigma_y$ می باشد. چنین مدلی به صورت محافظه کارانه سخت شدگی کرنشی را نادیده می گیرد و با آنچه تاکنون مد نظر بوده تطابق دارد. این معیار قابل اطمینان بوده و به معمولاً به دلیل سخت شدگی کرنشی می توان به تنش برشی بیشتری دست یافت. با این معیار، به عنوان یک نقطه شروع، بسیاری از مدل ها جهت تعیین ممان پلاستیک کاهش یافته در حضور نیروهای برشی پیشنهاد شده است. راه حل -هایی که در اینجا ارائه می شود، براساس ملاحظات تعادل می باشد و عموماً دارای راه حل های کران پایین و محافظه کارانه ای هستند.

در اینجا، جهت نشان دادن اندرکنش خمش-برش برای مقاطع عرضی مستطیلی، توزیع تنش های محوری و خمشی مطابق با شکل ۱-۱۲ با توجه به معیار تسلیم فون میزس بکار می رود. توزیع تنش های برشی تنها با در نظر گرفتن باقی مانده هسته الاستیک (تسلیم نشده) و آگاهی از اینکه تنش های برشی به صورت سهموی در امتداد مقطع عرضی مستطیلی تغییر می کند، بدست می آید. بنابراین با این آگاهی که تنش برشی ماکزیمم وارد بر مقطع مستطیلی ۵۰٪ بزرگتر از تنش برشی میانگین است و همچنین با بکارگیری معیار تسلیم فون میزس برای مقطعی با عمق هسته الاستیک $2.7y$ ، نیاز است که مقطع در برابر نیروی برشی V مقاومت کند. این نیروی برشی را می توان به صورت زیر محاسبه کرد:

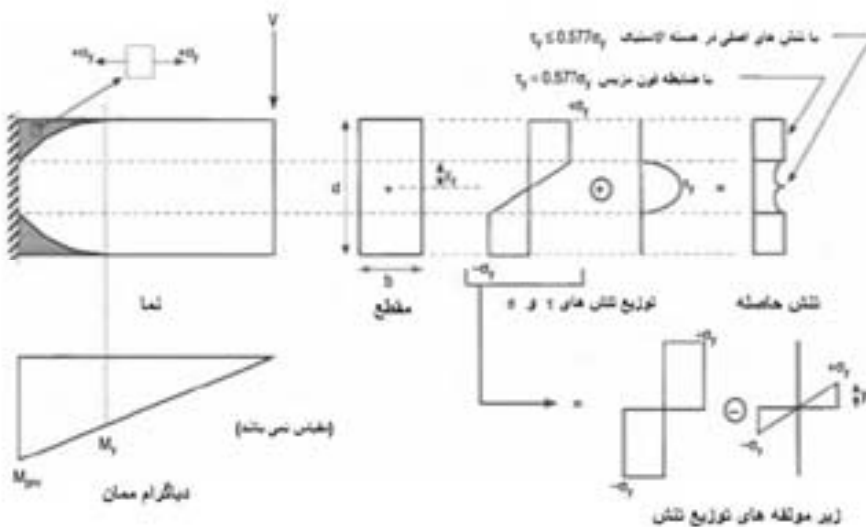
$$\tau_y = \frac{1.5V}{A_{effective}} = \frac{1.5V}{2.7y_b} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} = 0.577\sigma_y \quad y_y = \frac{1.2V}{b\sigma_y} \quad (30-1)$$

دیگرام برآیند تنش محوری در محدوده \bar{y}_y از محور خنثی، الاستیک و فراتر از آن مقدار، پلاستیک می باشد که جهت محاسبه ظرفیت ممان پلاستیک کاهش یافته استفاده می شود. با بکارگیری اصل جمع آثار قوا مطابق با شکل ۱-۱۲ همانطور که قبلاً نشان داده شد، ممان کاهش یافته حاصل از برش با فرمول زیر بدست می آید:



$$\frac{M_{prrs}}{M_p} = \frac{M_p - \tau \left[\left(\frac{by_y}{\tau} \right) \left(\frac{y_y}{\tau} \right) \right] \sigma_y}{\left(\frac{bd^3}{\tau} \right) \sigma_y} = 1 - \frac{\tau}{\tau} \left(\frac{y_y}{d} \right)^2 = 1 - \frac{\tau}{\tau} \left(\frac{V}{V_p} \right)^2 \text{ برای } \left(\frac{V}{V_p} \right) \leq \sqrt{\frac{1}{3}(3I-1)}$$

در معادله بالا، آخرین تساوی با جایگزین کردن مقدار y_y در معادله قبلی بدست می آید و V_p به عنوان برش متناظر با مقطعی که بطور کامل تحت برش، پلاستیک شده تعریف می گردد (در این حالت تنش های برشی باید در بالا و پایین مقطع باید صفر باشد، ولی به دلیل اینکه این وضعیت مهم را نقض می کند، یک کمیت صرفاً نظری می باشد). برای مقطع عرضی مستطیلی V_p برابر با $bd\tau_y$ می باشد. حدود کاربرد معادله بالا به سادگی به عنوان نتیجه ای از توزیع تنش برشی سهموی فرض می شود. به عبارت دیگر، تنش برشی ماکزیمم به ۱.۵ برابر تنش میانگین ماکزیمم که می تواند در فقدان تنش های تسلیم محوری بر مقطع عرضی؛ $\tau_y = 1.5\tau_{average} = 1.5V_{max}/bd$ وارد شود، محدود گردد.



شکل ۱-۱۲- توزیع تنش برشی و محوری در مقطع عرضی مستطیلی شکل در محدوده پلاستیک

با توجه به اینکه تنش های محوری و برشی در محدوده $\bar{F}y_y$ به ترتیب به صورت خطی و سهموی تغییر می کند، دایره مور را می توان جهت محاسبه تنش های اصلی برشی در هر نقطه در این ناحیه بکار برد:

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_y}{\tau} \right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y y}{\tau y_y} \right)^2 + \left[\frac{\sigma_y}{\sqrt{\tau}} \left(1 - \left(\frac{y}{y_y} \right)^2 \right) \right]^2} \quad (32-1) \\ &= \sigma_y \sqrt{\frac{1}{\tau} - \frac{5}{12} \left(\frac{y}{y_y} \right)^2 + \frac{1}{\tau} \left(\frac{y}{y_y} \right)^4} \end{aligned}$$

این معادله نشان می دهد که تنش اصلی برشی τ_y فقط در نقطه $y = 0$ و $\bar{F}y_y$ حاصل می شود و در هیچ جایی به دلیل اینکه همیشه $\left(\frac{y}{y_y} \right)^2$ از $\left(\frac{y}{y_y} \right)^4$ بزرگتر است، از این مقدار فراتر نمی رود (یعنی؛ $y \leq y_y$). همچنین، محاسبه تنش برشی مینیمم در این منطقه با در نظر گرفتن مشتق اول معادله بالا برابر با صفر بدست می آید که مقداری نزدیک به ۸۰٪ تنش اصلی برشی τ_y را ارائه می دهد. این مطلب نشان می دهد که چگونه مقطع باید بطور موثر مورد استفاده قرار گیرد. همانطور که قسمتی از مقطع عرضی تحت کرنش های محوری σ_y تسلیم شدند، در معیار فون

میزس هیچ نیروی برشی را نمی توان اعمال کرد. اما برای تکمیل دیاگرام تنش های اصلی، σ_y را می توان برابر با $\sqrt{3}\tau_y$ یا به روش دیگری به صورت $\tau_y = \sigma_y/\sqrt{3}$ بیان کرد.

اگرچه از روشی مشابه می توان جهت محاسبه ظرفیت ممان کاهش یافته مقاطع بال پهن استفاده کرد، اما در عمل معمولاً روش مناسب تری برای ارائه برآورد قابل اطمینان این مقدار وجود دارد. روش دیگر در شکل ۱-۱۳ نشان داده شده است. ابتدا فرض می شود، تنش برشی یکنواختی به عنوان برآیند نیروی برشی اعمال شده بر جان وارد گردد که به صورت زیر محاسبه می شود:

$$t_w = \frac{V}{hw}(33-1)$$

سپس، معیار تسلیم فون میزس برای برآورد تنش محوری ماکزیمم را می توان بر جان مقطع اعمال کرد (یعنی؛ ظرفیت تنش محوری باقی مانده و موجود):

$$\sigma_m = \sqrt{(\sigma_y^2 - 3\tau_w^2)} = \sigma_y \sqrt{1 - \left(\frac{t_w}{t_y}\right)^2} \quad (34-1)$$

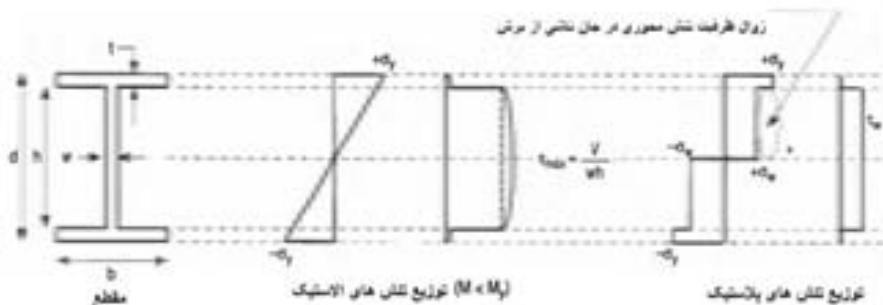
تنش محوری ماکزیمم که می توانند به بال اعمال شوند، σ_y باقی می ماند. سپس، می توان بطور مستقیم از دیاگرام برآیند تنش محوری، ممان پلاستیک کاهش یافته را بدست آورد. همچنین با استفاده از اصل جمع آثار قوا دیاگرام های تنش به سادگی محاسبه می شوند. بر همین اساس داریم:

$$M_{prv} = M_p - M_{loss} = Z_{prv}\sigma_y$$

که در آن،

$$M_{loss} = \frac{h^2 w}{4}(\sigma_y - \sigma_w) = \frac{h^2 w}{4} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{t_w}{t_y}\right)^2} \right] \sigma_y = Z_{loss}\sigma_y \quad (35-1)$$

و Z_{prv} به عنوان مدول مقطع پلاستیک کاهش یافته در حضور برش تعریف می گردد. این روش تنها برای نیروهای برشی که کوچکتر مساوی با آنچه تسلیم برشی در سراسر جان تولید می کند، اعتبار دارد. علاوه بر این، این روش را نمی توان برای سایر مقاطع بسط داد، مگر اینکه این مقاطع دارای جان هایی باشند توانایی مقابله با مقدار نیروی برشی اعمالی در شرایطی مثل تنش های برشی یکنواخت را داشته باشد. به عنوان نمونه مثال، برای اشکال بال پهن تحت خمش حول محور ضعیف خود، معادلات بدست آمده برای مقطع عرضی مستطیلی عملاً مناسب تر می باشد.



شکل ۱-۱۳- توزیع تنش الاستیک و پلاستیک در شکل سازه های بال پهن در معرض برش و خمش

اگرچه عبارات بیشتر دیگری برای تشریح اندرکنش پلاستیک برش-خمش در پژوهش های موجود پیشنهاد شده است و روش های ذکر شده برای محاسبات دستی بسیار محافظه کارانه و ساده تر می باشند. آزمایشات نشان داده اند که کاهش در

ظرفیت ممان پلاستیک در واقع کمتر از مقداری است که با معادلات فوق الذکر پیش بینی می شود (مانند: *ASCE*, ۱۹۷۱؛ *Kasai* و *Popov*, ۱۹۸۶). علاوه بر این، در اکثر حالات اثر نیروهای برشی بر ظرفیت ممان پلاستیک بسیار ناچیز است.

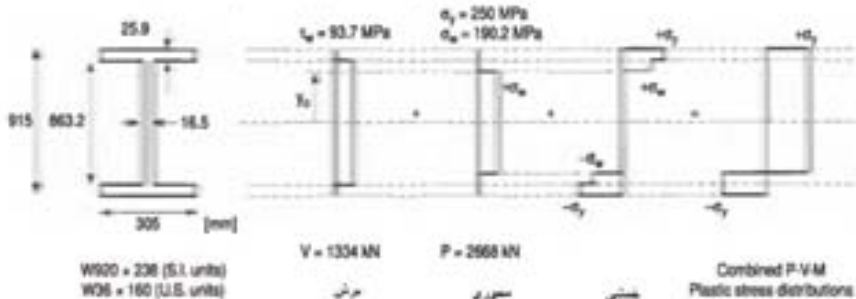
۱-۴- بارگذاری ترکیبی خمشی، محوری و برشی

ترکیبی از اندرکنش بارگذاری خمشی، محوری و برشی را می توان بواسطه اصول فوق در نظر گرفت. پیرو روش بکار گرفته شده در بخش قبلی، با اختصاص بخشی از مقطع عرضی برای مقاومت در برابر هر نوع بارگذاری بطور جداگانه، می توان راه حل ها با فرم بسته را گسترش داد. اما در اکثر حالات محاسبه مستقیم نتایج مورد نیاز از دیاگرام تنش عملاً مناسب تر است.

برای مثال، ممان پلاستیک کاهش یافته یک مقطع با شکل $W920 \times 238$ زمانیکه نیروی برشی V برابر با ۱۳۳۴ kN و نیروی محوری P برابر با ۲۶۶۸ kN بطور همزمان وارد می گردد را می توان با فرض اینکه تنش تسلیم فولاد برابر با 250 MPa باشد، در ادامه محاسبه کرد (برخی از مراحل این مثال در شکل ۱-۱۴ نشان داده شده است).

ابتدا، تنش برشی میانگین وارده بر جان مقطع بال پهن حاصل از نیروی برشی اعمالی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\tau_w = \frac{V}{wh} = \frac{1,334,000 \text{ N}}{(16.5 \text{ mm})(863.2 \text{ mm})} = 93.7 \text{ N/mm}^2 = 93.7 \text{ MPa} \quad (36-1)$$



شکل ۱-۱۴- مثالی از مقاومت پلاستیک یک شکل سازه های بال پهن در معرض نیروهای خمشی، محوری و برشی

در ضمن، این مقدار تقریباً ۶۵٪ مقاومت تسلیم جان که $0.577\sigma_y$ یا 144.3 MPa است، می باشد. سپس معیار تسلیم فون میزس جهت محاسبه ظرفیت تنش محوری موجود در جان استفاده می شود:

$$\sigma_w = \sqrt{\sigma_y^2 - 3\tau_w^2} = \sqrt{(250)^2 - 3(93.7)^2} = 190.2 \text{ MPa} = 0.761 \sigma_y \quad (37-1)$$

با ظرفیت باقی مانده تنش محوری جان؛ 190.2 MPa و ظرفیت تنش محوری ماکزیمم بال؛ 250 MPa می توان قسمتی از مقطع مورد نیاز برای تحمل در برابر نیروی محوری را با روشی که قبلاً بیان شد، محاسبه کرد. در این حالت اثبات می شود که محور خنثی در جان قرار دارد:

$$\sigma_w = 190.2 \text{ MPa} = \frac{2,668,000 \text{ N}}{2y(16.5)} \rightarrow y = 425 \text{ mm} < \frac{h}{2} = 431.6 \text{ mm} \quad (38-1)$$

سهام های جان و بال ها برای مقاومت خمشی را می توان به صورت زیر اضافه کرد:

$$\begin{aligned} M_{pr-web}^{P,V} &= \frac{wh^2}{4} \sigma_w - \frac{w(2y)^2}{4} \sigma_w \\ &= \frac{(16.5)(863.2)^2}{4} (190.2) - \frac{(16.5)(850)^2}{4} (190.2) \\ &= 584.5 - 567 \text{ kN} - \text{m} = 17.5 \text{ kN-m} \quad (39-1) \end{aligned}$$

$$M_{pr-flange}^{P,V} = 2 \left[bt \left(\frac{d-t}{2} \right) \right] \sigma_y$$

$$\begin{aligned}
 &= (30.5)(25.9) \left(\frac{915 - 25.9}{2} \right) (25.0) \\
 &= 1755.9 \text{ kN-m}(40-1) \\
 M_{pr}^{P,V} &= M_{pr-flange}^{P,V} + M_{pr-web}^{P,V} = (1755.9 + 17.5) \text{ kN} - \text{m} = 1773.4 \\
 &\text{kN} - \text{m} (41-1)
 \end{aligned}$$

که در آن، اندیس فوقانی (P, V) نشان می‌دهد که این ممان پلاستیک برای در نظر گرفتن نیروهای محوری و برشی اعمال شده کاهش پیدا می‌کند (شکل ۱-۱۴). این شکل سازه‌ای دارای مدول پلاستیک Z برابر با $10,200,000 \text{ mm}^3$ می‌باشد و از اینرو در فقدان نیروهای برشی و محوری، ممان پلاستیک متناظر برابر با $2550 \text{ kN} - \text{m}$ می‌گردد. بنابراین ظرفیت ممان پلاستیک کاهش یافته در این مثال، ۷۰٪ از مقدار کاهش نیافته است.

هنگامیکه از مقدار مدول مقطع پلاستیک موجود استفاده شود (به عنوان مثال، در $AISC 2011$ یا $CSIC 2010$ این مقادیر جدول‌بندی شده است)، استفاده از روش کم کردن عملاً مناسب‌تر است. در واقع، با کم کردن ممان‌های متناظر با سهم‌های نیروی محوری و برش از ممان پلاستیک با توجه به دیاگرام‌های تنش داریم:

$$\begin{aligned}
 M_{pr}^{P,V} &= M_p - M_{pr}^V - M_{pr}^P = M_p - \frac{wh^2}{4} (\sigma_y - \sigma_w) - \frac{w(\tau_y)^2}{4} \sigma_w (42-1) \\
 &= (2550 - 183.8 - 567) \text{ kN-m} = 1779.2 \text{ kN} - \text{m}
 \end{aligned}$$

نتایج بدست آمده با استفاده از روش‌های کاهش و افزایشی، به دلیل اینکه در حالت دوم از مقدار مدول پلاستیک مقطع دستنامه استفاده شده است، کمی با هم متفاوت است. مقادیر دستنامه‌ها معمولاً شکل رند شده صحیح مقطع عرضی را در تقاطع بال و جان در نظر می‌گیرند که بطور معمول هنگامیکه این ویژگی مقطع با محاسبات دستی تعیین می‌گردد، نادیده گرفته می‌شود. این تفاوت عملاً ناچیز است.

۱-۵-۱- پیچش پلاستیک خالص: روش تپه ماسه (sand-heap analogy)

مقاومت پیچشی پلاستیک یک مقطع عرضی را می‌توان با توسعه منطقی نتایج حاصل از تئوری الاستیسیته تعیین نمود. استخراج کامل تئوری پیچش الاستیک فراتر از محدوده این کتاب می‌باشد و معمولاً به صورت جامع در کتاب‌های درسی مقاومت مصالح پوشش داده می‌شود. هرچند برخی از نتایج مهم مورد نیاز در تئوری الاستیک که برای درک پیچش پلاستیک لازم است، در ادامه خلاصه شده است.

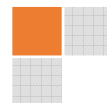
۱-۵-۱- مروری بر نتایج مهم تحلیل الاستیک

برای یک عضو سازه‌ای در پیچش خالص که محور طولی آن در راستای محور z می‌باشد، تنش‌های غیر صفر برشی τ_{zx} و τ_{zy} و مولفه‌های متقابل آنها برابر τ_{xz} و τ_{yz} بر مقطع عرضی وارد می‌شود. نماد اندیسی دوگانه در تنش‌ها را می‌توان به صورت زیر بیان نمود: اولین اندیس نشان‌دهنده جهت عمود بر سطحی است که مولفه‌های تنش بر روی آن اثر می‌کند و دومین اندیس مربوط به جهت خود تنش می‌باشد. این مقادیر را می‌توان از طریق روابط ساختاری قانون عمومی هوک تعریف نمود (به عنوان مثال: روابط تنش- کرنش). برای برقراری تعادل، معادلات دیفرانسیل با استفاده از تئوری الاستیسیته تعریف می‌گردد؛ با توجه به این مطلب رابطه زیر باید ارضاء گردد:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \quad (43-1)$$

معادله سازگاری برای این مسئله با مشتق گرفتن از عبارت تنش برشی حاصل از قانون عمومی هوک به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -2\alpha \quad (44-1)$$



که در آن، θ زاویه پیچش در واحد طول، G مدول برشی و Φ تابع تنش پراتل می باشد که یک روش آسان ریاضی است که اگر تساوی زیر برقرار باشد، رابطه بالا را ارضاء می نماید:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \tau_{zy} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} (45-1)$$

در امتداد لبه مقطع عرضی، تابع تنش پراتل باید ثابت باشد و معمولاً جهت راحتی صفر در نظر گرفته می شود. بنابراین برای دستیابی به راه حل الاستیک مسائل پیچش، باید تابع تنش x و y : $\Phi(x, y)$ که می تواند شرایط بالا را ارضاء کند، حدس زده شود. هنگامیکه این تابع شناخته شود، گشتاور مربوطه که به عضو اعمال می گردد را می توان با رابطه زیر محاسبه کرد:

$$T = 2 \iint \Phi \partial x \partial y (46-1)$$

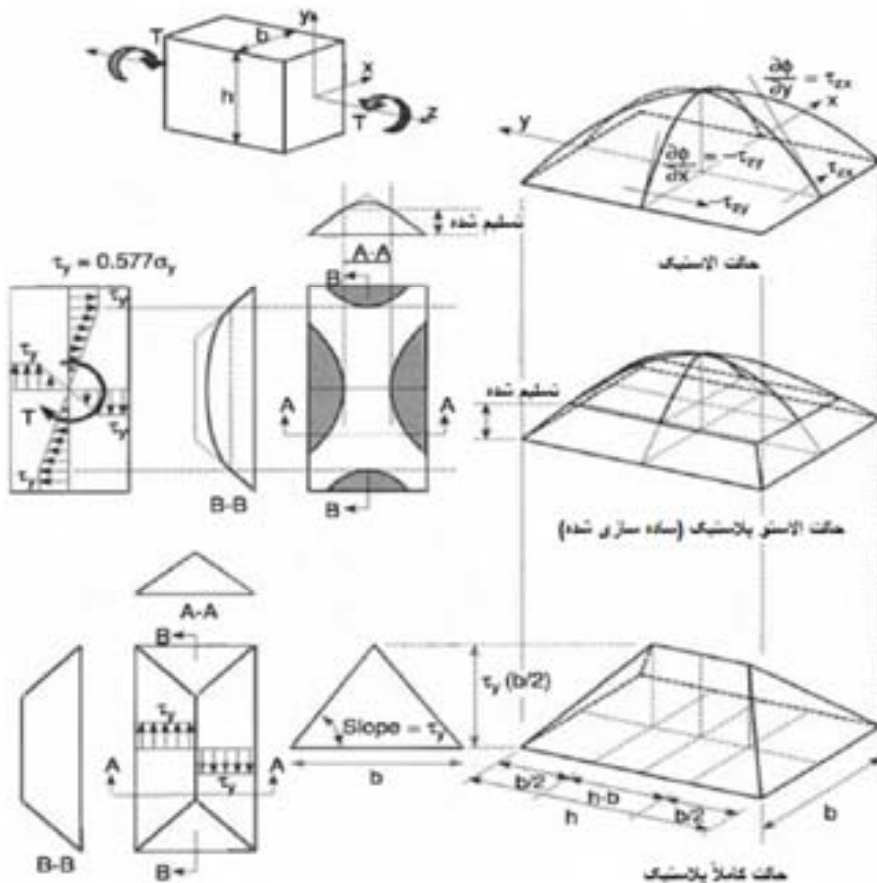
ساختار معادله دیفرانسیل تابع تنش (معادله ۱-۴۴ بالا) همانند توصیفی از خیز غشاء (حباب صابون) با همان شکل مقطع عرضی می باشد که در زیر فشار یکنواخت محبوس شده است (روش تشبیهی غشایی پراتل). مقایسه این دو عبارت نشان می دهد که تابع تنش Φ با خیز غشاء مطابقت دارد و تنش های برشی مطابق با شکل ۱-۱۵ در مسئله پیچش مشابه شیب غشاء می باشد. بنابراین ممان پیچشی دو برابر حجم حباب می باشد. خوانندگان گرامی می توانند برای تشریح معادلات ۱-۴۳ الی ۱-۴۶ به مطالعات *Popov* در سال ۱۹۶۸، *Timoshenko* و *Goodier* در سال ۱۹۷۰ و *Fenster* و *Ugural* در سال ۱۹۹۵ مراجعه کنید.

۱-۵-۲- روش تپه ماسه

با افزایش پیشرونده گشتاور اعمال شده، هنگامیکه تنش برشی در هر نقطه ای به $0.577\sigma_y$ برسد، تسلیم شدگی مقطع عرضی شروع می شود (در معیار تسلیم فون میزس). با توجه به روش غشایی پیش بینی می شود که این امر در مکانی امتداد لبه مقطع عرضی در نقاط مرزی یا کناری نزدیک به مرکز پیچش رخ می دهد (یعنی جاییکه شیب حباب صابون بزرگترین مقدار خود را داراست). همچنین می توان مشاهده کرد، هنگامیکه گشتاور اعمالی بزرگتر می شود، تسلیم شدگی به سمت داخل توسعه می یابد (شکل ۱-۱۵) و گشتاور پلاستیک T_p به محض تسلیم شدگی تمام مقطع عرضی ایجاد می شود. در شرایط تسلیم شدگی کامل مقطع، به دلیل آنکه در هر نقطه برآیند تنش نمی تواند از مقدار تنش تسلیم برشی فراتر رود، داریم:

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2} = |\nabla \Phi| = \tau_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} (47-1)$$

که نشان می دهد، شیب ماکزیمم در تمام نقاط در شرایط پلاستیک کامل باید با مقدار تنش تسلیم برشی برابر باشد. با این آگاهی، سطح پلاستیک نسبتاً ساده ای را می توان ساخت و این مطلب که دو برابر سطح زیر منحنی اندازه گشتاور پلاستیک مربوطه را می دهد، همچنان صحیح است. شکل سطح پلاستیک را می توان با یک تپه ماسه مقایسه کرد. هنگامیکه ماسه خشک روی میز شیب به مقطع عرضی ریخته می شود، شکل حاصله به دلیل اینکه ماسه خشک تنها در یک شیب معین پایدار می ماند، به سطح پلاستیک مربوطه شباهت خواهد داشت. همچنین، این شیب در بالای مقطع عرضی ثابت است که در واقع بیانگر روش آزمایش تپه ماسه می باشد.



شکل ۱-۱۵-۱- مقطع عرضی مستطیلی در معرض گشتاور که به صورت پیشرونده تا رسیدن به گشتاور پلاستیک افزایش می‌باید.

برای مثال، برای یک مقطع عرضی مستطیلی، سطح پلاستیک مطابق با ۱-۱۵ به شکل یک هرم مستطیلی با شیب τ_y می‌شود و گشتاور پلاستیک مربوطه نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T_p = \tau (\text{حجم زیر تابع تنش } \emptyset)$$

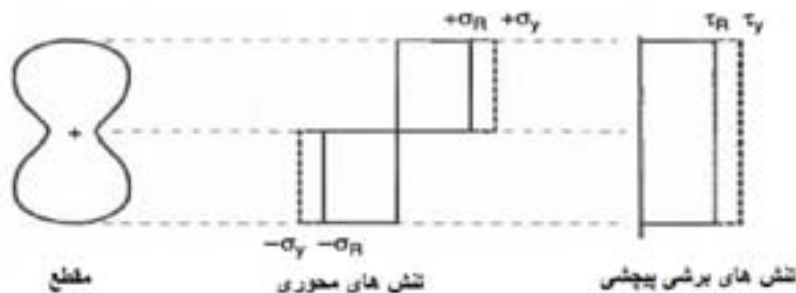
$$= \tau \left[\frac{b}{\tau} \left(\frac{b\tau_y}{\tau} \right) (h - b) \right] + \frac{1}{\tau} \left(\frac{b\tau_y}{\tau} \right) b^2 = \tau \tau_y \frac{b^2}{\tau} \left[\frac{\tau}{\tau} \left(\frac{h}{b} - 1 \right) + 1 \right] = \tau_y \frac{b^2}{\tau} \left[\frac{\tau}{\tau} \left(\frac{h}{b} - 1 \right) + 1 \right] = Z_T \tau_y (48-1)$$

که در آن، Z_T مدول مقطع پلاستیک پیچشی می‌باشد. نتایج برای تعدادی از مقاطع همراه با نسبت متناظر گشتاور کاملاً پلاستیک به گشتاور ماکزیمم الاستیک در جدول ۱-۱ نشان داده شده است.

Cross section	T_p	T_p/T_E
	$\tau_y \left[\frac{d}{2} + b - \frac{7t}{6} \right]$	$= \frac{3}{2} \left[\frac{2\rho_r + \rho_t^3 \rho_w}{2\rho_r - 0.63 + \rho_t^4 (\rho_w - 0.63)} \right]$ where $\rho_r = \frac{b}{t}$; $\rho_t = \frac{w}{t}$ and $\rho_w = \frac{(d-2t)}{w} = \frac{h}{w}$ = 1.80 for W shapes = 1.67 for WWF shapes
	$\tau_y \left[t^2 \left(b - \frac{t}{3} \right) + \frac{w^2}{2} \left(d - 2t + \frac{w}{3} \right) - tw^2 \right]$ $= \frac{1}{2} [2t^2 b + w^2 (d - 2t)] \tau_y$	
	$\frac{\tau_y t^2}{2} \left[b + d - \frac{4t}{3} \right]$	—
	$\frac{\tau_y}{2} \left[bt^2 + dw^2 - \frac{t^3}{3} - w^2 t \right]$	—
	$\frac{\tau_y}{2} \left[bt^2 + dw^2 - \frac{w^3}{3} - t^2 w \right]$	—
	$\frac{1}{2} \tau_y a^3 \left[\frac{b}{a} - \frac{1}{3} \right] = \frac{ba^2 \tau_y}{2}$ if $b \gg a$	1.605 if $b/a = 1.0$ 1.690 if $b/a = 2.0$ 1.590 if $b/a = 4.0$ 1.500 if $b/a = \infty$
	$\frac{2\pi}{3} \tau_y (R^3 - r^3)$ $= 2\pi \tau_y \left(R - \frac{r}{2} \right)^2 t$ if $(R - r) = t = \text{small}$	1.33 1.0
	$\frac{a^3}{12} \tau_y = 2\sqrt{3} r^3 \tau_y$	1.67
	$\frac{2\pi}{3} a^3 \left[1 - 4.5 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + 4 \left(\frac{b}{a} \right)^3 \right] \tau_y$	1.33 $\left[\frac{1 - 4.5\beta^2 + 4\beta^3}{1 - \beta - \beta^2 + \beta^3} \right]$ where $\beta = b/a$

۶-۱- ترکیب خمش و پیچش

اندرکنش خمش و پیچش نیز نیازمند در نظر گرفتن روابط پلاستیک بین تنش‌های محوری و برشی با بکارگیری معیار تسلیم فون میزس می‌باشد. اصول پیشین برای تعیین معادلات اندرکنش پیچشی خمشی را می‌توان به شرح زیر توسعه داد. ابتدا فرض می‌کنیم که به دلیل اندرکنش پیچشی/خمشی، تنها ظرفیت تنش محوری کاهش یافته؛ $\sigma_R < \sigma_y$ و ظرفیت تنش برشی کاهش یافته؛ $\tau_R < \tau_y$ مطابق با شکل ۱-۱۶، به ترتیب جهت مقاومت در برابر ممان و گشتاور اعمال شده موجود است.



شکل ۱-۱۶- وضعیت تنش برشی و محوری کاهش یافته طی اندرکنش پلاستیک خمش-پیچش

سپس، معیار تسلیم فون میزس بازنویسی می شود:

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \left(\frac{M_{pr}^T}{Z}\right)^2 + 3\left(\frac{T_{pr}^M}{Z_T}\right)^2 = \sigma_y^2 (49-1)$$

که در آن، M_{pr}^T ممان پلاستیک کاهش یافته در حضور پیچش و T_{pr}^M گشتاور پیچشی پلاستیک کاهش یافته در حضور خمش می باشد. با جایگزین کردن مقادیر Z_T و Z در معادله بالا، این معادله به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\left(\frac{M_{pr}^T}{M_p}\right)^2 + \left(\frac{T_{pr}^M}{T_p}\right)^2 = 1 (50-1)$$

سپس برای هر مقدار ممان اعمال شده M ، گشتاور پلاستیک متناظر با آن را می توان به صورت زیر توسعه داد:

$$T_{pr}^M = T_p \sqrt{1 - \left(\frac{M}{M_p}\right)^2} (51-1)$$

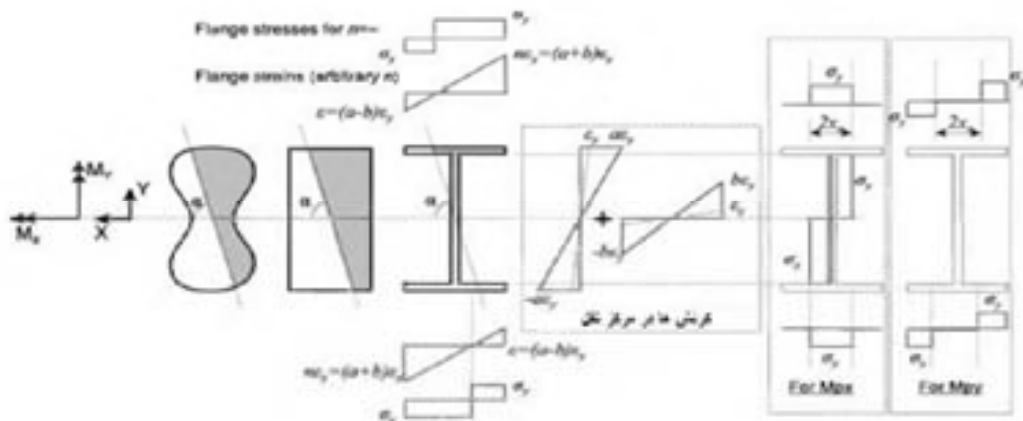
همانطور که می دانیم، معادلات اندرکنش مشابه را می توان با همان روش برای تعیین اندرکنش نیروی محوری و پیچش و همچنین اندرکنش خمش، نیروی محوری و پیچش توسعه یابد. معادلات اندرکنشی که براساس توزیع فرضی تنش ها، تعادل را ارضا می کنند، محافظه کارانه و قابل اطمینان هستند. شایان ذکر است این معادلات در فصل بعدی براساس تئوری کران پایین تشریح می گردد.

۷-۱- خمش دو محوره

۷-۱-۱- اصول کلی

خمش دو محوره تنها منجر به تنش ها و کرنش های محوری در مقطع عرضی می شود. در نتیجه مقاومت های پلاستیک تحت خمش دو محوره و دیاگرام های اندرکنش متناظر، مقاومت های خمشی حول دو محور اصلی را نشان می دهد که با توجه به اصول بیان شده در بخش های ۱-۱ و ۲-۱ بدست می آیند. برای این مورد چند روش مختلف نیز را می توان بکار برد. همانطور که در بخش ۷-۱-۲ شرح داده خواهد شد، ابتدا برنامه ای با هدف تحلیل مقطع عرضی را می توان جهت انجام محاسبات خودکار، بر اساس یک مدل فیبری توسعه داد. دوم؛ برای مقاطع عرضی مشخص، ممکن است راه حل ها با فرم بسته میسر باشد. هنگامیکه مقطع عرضی رفتار پلاستیک را تجربه می کند، ممکن است دستیابی به توزیع تنش برای جفت ممان های اعمال شده به سادگی صورت نگیرد. اما متقابلاً محاسبه ممان ها برای یک جهت معین از محور خنثی؛ α با هم برای کرنش های موجود نسبتاً آسان است (حتی اگر در بعضی از موارد پیچیدگی جبری قابل توجه باشد). ممان های پلاستیک حول محورهای متعامد اصلی (به خصوص برای مقطع عرضی که بطور کامل پلاستیک شده است) در اثر وقوع همزمان کاهش می یابد که می توان آن را محاسبه کرد. نتایج معمولاً برای محورهای متعامد که با لبه های مقطع عرضی

موازی هستند، ارائه می شود که به صورت شماتیک برای یک شکل سازه ای بال پهن در شکل ۱-۱۷ نشان داده شده است که می توان از دیگر جهت های مناسب جبری نیز استفاده کرد. برای مثال مقاومت پلاستیک مقاطع دایره ای به α وابسته نیست، در این حالت مسئله خمش دو محوره به خمش تک محوره حول محور برآیند ممان اعمال شده کاهش می یابد. راه حل ها با فرم بسته برای حالت مهمی از یک مقطع بال پهن در ادامه ارائه می شود. همچنین این معادلات می تواند برای صحت سنجی نتایج بدست آمده طی توسعه ابزار تحلیل محاسباتی بر اساس مدل فیبری مفید باشد.



شکل ۱-۱۷- توزیع تنش پلاستیک برای ممان پلاستیک در خمش دو محوره

۳-۱-۱-۷- پلاستیک شدگی کامل مقطع بال پهن تحت خمش دو محوره

همانطور که در شکل ۱-۱۷ مشاهده می کنیم، وضعیت کاملاً پلاستیک یک مقطع بال پهن تحت خمش دو محوره به نمایش درآمده است. در این شرایط محور خنثی باید برای توسعه ممان پلاستیک حول محور ضعیف، بال را به دو نیم تقسیم کند. همچنین توجه داریم که محورهای x و y بطور دلخواه در جهت مثبت ممان های پلاستیک قرار دارند. ممان های مثبت مطابق با "قانون دست راست" به نحوی اعمال شده اند که گوشه راست بالای مقطع تحت فشار قرار می گیرد. به منظور تسریع در محاسبات، علم بر این نکته بسیار مهم است که دیاگرام های تنش را می توان به زیر مولفه های توزیع تنش تجزیه نمود (همانطور که در شکل ۱-۱ نشان داده شد). با توجه به این دیدگاه، دیاگرام های تنشی را که می بایستی برای محاسبه ممان پلاستیک کاهش یافته حول هر دو محور در نظر گرفت، بطور جداگانه در شکل ۱-۱۷ رسم شده است.

برای یک محور خنثی که بال را در فاصله x از مرکز ثقل مقطع عرضی به دو نیم تقسیم می کند، ممان پلاستیک حول محور y به صورت زیر بدست می آید:

$$M_{pr-y}^{Mx} = 2[M_{pyf} - M_{pyf,x}] = 2\left[\left(\frac{tb^2}{4}\right) - \left(\frac{t(yx)^2}{4}\right)\right] F_y = \left[\frac{tb^2}{2} - 2x^2\right] F_y \quad (52-1)$$

توجه داریم که جان مشارکتی در M_y ندارد و M_{pyf} ممان پلاستیک یک بال حول محور y و $M_{pyf,x}$ ممان پلاستیک برای طول x این بال می باشد. نماد بکار رفته برای بیان ممان پلاستیک کاهش یافته بیانگر ممان موجود در جهات متعامد بوده که پیش تر نحوه دستیابی به آن معرفی شده است. همچنین با نرمال کردن ممان پلاستیک برای کل حول این محور مجدداً سهم کوچک جان نادیده گرفته می شود:

$$\frac{M_{pr-y}^{Mx}}{M_{py}} = \frac{2\left[\left(\frac{tb^2}{4}\right) - \left(\frac{t(yx)^2}{4}\right)\right] F_y}{\left(\frac{tb^2}{4}\right) F_y} = \left[1 - \frac{4x^2}{b^2}\right] = (1 - \beta^2) \quad (53-1)$$

که در آن، $\beta = x./(b/2)$ می باشد که موقعیت محور خشی را به عنوان جزئی از فاصله لبه بال تعیین می کند که در اینجا جهت ساده سازی معادلات معرفی شده است.

با تفاضل ممان پلاستیک کل حول جهت x از ممانی که توسط بخشی از بال که در جهت متعامد مقاومت می کند (این بخش ها دارای نیروهای برابر و مخالف بوده که یکدیگر را در هر بال مربوطه خشی می نمایند.) ممان کاهش یافته متناظر با سهم زیر مولفه های دیاگرام تنش به صورت زیر تعریف می شود:

$$M_{pr-x}^{My} = M_{px} - M_{px,loss} = M_{px} - [(b - 2x).t(d - t)]F_y \quad (54-1)$$

نرمال کردن آن نیز توسط ممان پلاستیک برای کل مقطع حول این محور به صورت زیر می گردد:

$$\frac{M_{pr-x}^{My}}{M_{px}} = \frac{M_{px} - [(b - 2x).t(d - t)]F_y}{M_{px}} = \left[1 - \frac{[(b - 2x).t(d - t)]}{\left[A_f(d - t) + \frac{A_w h}{4} \right]} \right] \quad (55-1)$$

با فرض تقریبی $h \approx (d - t)$ و در صورتیکه $A_f = bt$ و $A_w = hw$ باشد، معادله بالا را می توان بر حسب

A_f/A_w بازنویسی کرد:

$$\frac{M_{pr-x}^{My}}{M_{px}} = \left[1 - \frac{(b - 2x).t}{A_f + \frac{A_w}{4}} \right] = \left[1 - \frac{\left[\frac{4A_f}{A_w} \frac{xx.t}{A_w} \right]}{\left[\frac{4A_f}{A_w} + 1 \right]} \right] = \left[\frac{1 + \frac{4A_f \beta}{A_w}}{1 + \frac{4A_f}{A_w}} \right] \quad (56-1)$$

با استفاده از معادله ۵۶-۱ و هم چنین معادله ۵۳-۱ می توان عبارت β را تعیین نمود که با توجه به این مقدار معادله

اندرکنش مرتبط با مقاومت های خمشی کاهش یافته نرمال شده به صورت زیر بیان می گردد:

$$\frac{M_{pr-y}^{Mx}}{M_{py}} + \frac{\left[\left(1 + \frac{4A_f}{A_w} \right) \frac{M_{pr-x}^{My}}{M_{px}} - 1 \right]^2}{\left(\frac{4A_f}{A_w} \right)^2} = 1.0 \quad (57-1)$$

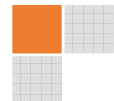
که در شکل ۱۸-۱ رسم شده است. توجه داریم که به عنوان نتیجه ای از فرضیات و ساده سازی های بالا، ظرفیت خمشی حول محور x می تواند به کمتر از ممان پلاستیک جان $M_{px,web}$ کاهش یابد. به عبارت دیگر، در مدل فوق تنها بال ها در برابر ممان در جهت مقاومت می کند و جان همیشه برای مقاومت در مقابل خمش حول محور x می باشد. شکل ۱۸-۱ بواسطه خطوط نقطه چین، محدوده ای که منحنی های رسم شده نامعتبر هستند را نشان می دهد؛ یعنی زیر نقاط برابر با M_{px-web}/M_{px} می باشد و همانطور که مشاهده می کنیم تابع A_f/A_w می باشد.

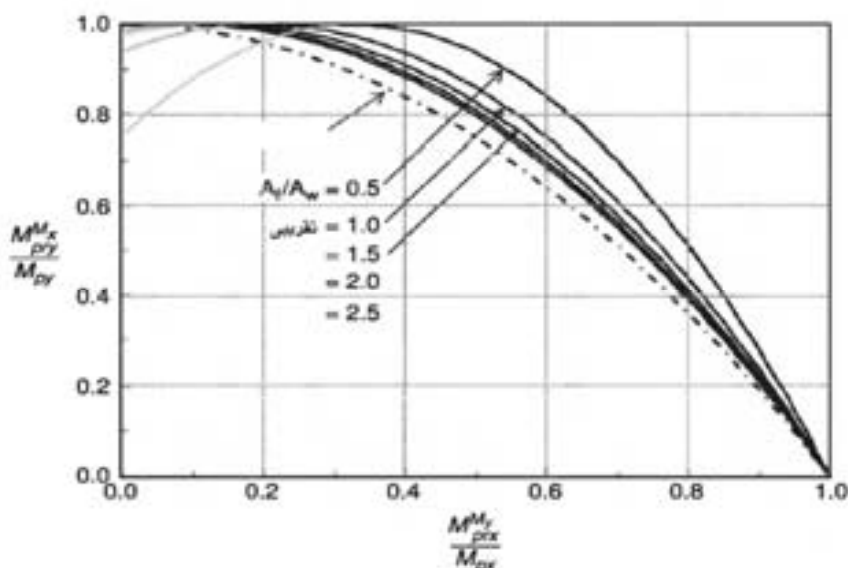
M_{razik} و همکاران (۱۹۸۷)، یک معادله اندرکنش تقریبی محافظه کارانه ای برای استخراج منحنی اندرکنش مشابه

پیشنهاد دادند که در شکل ۱۸-۱ به صورت خط-نقطه نشان داده شده است. زمانیکه $A_f/A_w = \infty$ است، در این حالت

معادله ۵۷-۱ به صورت زیر می گردد:

$$\frac{M_{pr-y}^{Mx}}{M_{py}} + \left[\frac{M_{pr-x}^{My}}{M_{px}} \right]^2 = 1.0 \quad (58-1)$$





شکل ۱-۱۸- دیاگرام اندرکنش نرمال شده خمشی دو محوره پلاستیک برای اشکال سازه های بال پهن

۱-۷-۱-۲- پلاستیک شدگی نسبی مقطع بال پهن تحت خمشی دو محوره

دیاگرام های اندرکنش خمشی دو محوره را می توان به همین نحو برای وضعیت مقطعی که به صورت نسبی پلاستیک شده است، بدست آورد (Mrazik و همکاران، ۱۹۷۸). در این حالت، برای تعیین اینکه پلاستیک شدگی در جان و یا اینکه در لبه بال ها توسعه یافته یا خیر، به مجموعه ای از معادلات نیاز داریم. این شرایط گوناگون در شکل ۱-۱۹ برای توزیع های مختلف کرنش که در همه آنها مقدار ماکزیمم $n\varepsilon_y$ در قسمت بالا و راست مقطع بال پهن مشترک است، نشان داده شده است که x فاصله از محور عمودی مقطع به موازات نقطه ای است که محور خشی بال را به دو نیم تقسیم می کند و x_i فاصله از نقطه دوم تا نقطه ای است که در آنجا کرنش برای اولین بار به ε_y می رسد. روابط جبری که به کرنش های موقعیت های مختلف در طول بال مربوط می باشد، برای تمام توزیع های کرنش که در اینجا در نظر گرفته شده است، معتبر باقی می ماند. با استفاده از تشابه مثلثات داریم:

$$x_i = \frac{b}{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma x}{b} \right) \rightarrow \frac{x_i}{x} = \frac{1}{n} \left[\frac{\beta+1}{\beta} \right] (59-1)$$

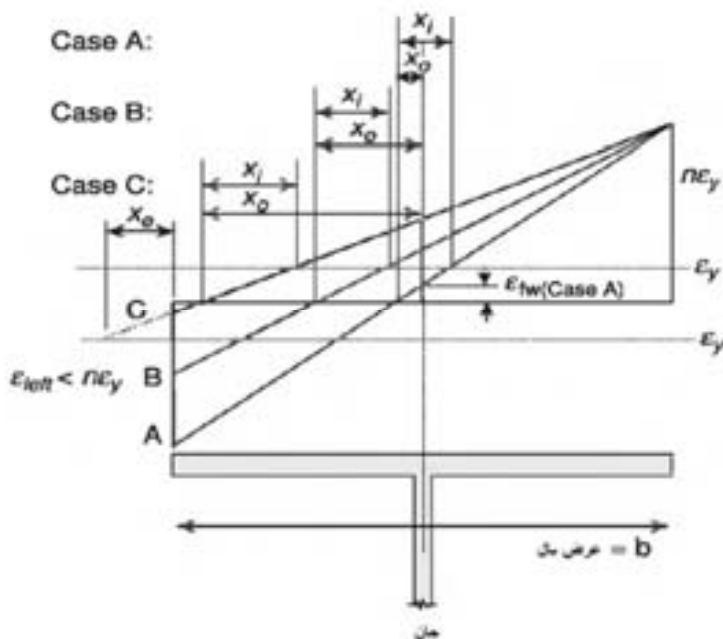
و کرنش در نقطه تقاطع جان به بال؛ ε_{fW} به صورت زیر است:

$$\varepsilon_{fW} = \frac{x}{x_i} \varepsilon_y (60-1)$$

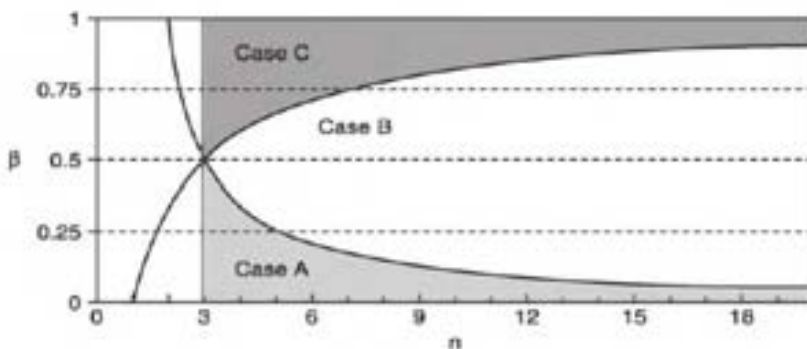
هنگامیکه $x \geq x_i$ می باشد، پلاستیک شدگی به سمت جان توسعه می یابد و موقعیت کرنش تسلیم* γ در فاصله ای در

امتداد جان از محور خشی می باشد:

$$y^* = \frac{h}{\gamma} \left(\frac{x_i}{x} \right) = \frac{h}{\gamma} \left[\frac{\beta+1}{\beta} \right] (61-1)$$



شکل ۱۹-۱- توزیع کرنش در بال برای حالات خمش دو محوره با در نظر گرفتن پلاستیک شدگی نسبی همچنین می توان نشان داد که جان در امتداد $1/(n-1) \leq \beta$ پلاستیک باقی می ماند $(x_i \leq x)$ و نوک های بال نیز تا زمانی که $(n+1)/(n-1) \leq \beta$ برقرار است، پلاستیک باقی می ماند. شکل ۲۰-۱ محدوده ای از کاربرد معادلات اندرکنش را بطور جداگانه نشان می دهد (همانطور که می دانیم در اینجا راه حل ها فقط برای $n \geq 2$ ارائه شده است). مجدداً، این نتایج با توانایی تجزیه دیاگرام های تنش به زیر مولفه های توزیع تنش، برای تسریع در روند محاسبات توسعه داده شده است. برخی از زیر مولفه های بکار رفته برای این منظور در شکل ۲۱-۱ نشان داده شده است.



شکل ۲۰-۱- محدوده کاربرد معادلات دو محوره

برای حالتی که $x_i \geq x$ و $x_i + x < (b/2)$ و پلاستیک شدگی در جان و هردو بال توسعه یافته است (حالت ب در شکل ۱۹-۱) داریم:

$$\frac{M_y}{M_{py}} = 1 - \beta^2 - \frac{1}{3n^2} (1 + \beta)^2 (62-1)$$