

مقدمه نویسنده:

پروردگار عالم را شاکرم که این توفیق را نصیب بنده کرد تا کتاب حاضر را که حاصل ماه‌ها تلاش برای نیل به هدفی والا است، اکنون به مرحله چاپ و انتشار همگانی رسانده است. آزمون‌های فراگیر استخدامی که سعی در گسترش عدالت استخدام در سازمان‌های دولتی و خصوصی دارد، مدتی است در میان دانش‌آموختگان دانشگاهی رواج یافته است تا پس از فراغت از تحصیل در دانشگاه وارد عرصه کار شوند و از آنجا که این آزمون مستقیماً با شغل و درآمد جوانان مرتبط است، شاهد رقابتی به مراتب دشوارتر از آزمون‌های ورود به دانشگاه در بین داوطلبان آن هستیم.

کتاب حاضر که حاصل سال‌ها تجربه تدریس ریاضیات در مقاطع مختلف تحصیلی از متوسطه تا دانشگاه و ماه‌ها دقت نظر برای هرچه درست‌تر نگاشتن آن است، تلاش دارد تا با یاری‌رسانی به داوطلبان آزمون‌های استخدامی، چه دولتی و چه خصوصی، سد محکمی به نام ریاضیات و آمار را، که به باور بسیاری از داوطلبان نفوذناپذیر است، بشکافد و از پیش پای آنان بردارد. کتاب پیش رو چند ویژگی حائز اهمیت دارد که آن را از دیگر منابع آمادگی برای آزمون استخدامی متمایز می‌کند:

۱. توضیحات کامل و دقیق:

رَویه نویسنده کتاب در طی تجربیات تدریس همواره بدین‌گونه بوده است که با درک و شناخت سطح علمی دانشجو، خود را تا سطح معلومات او پایین می‌آورد و آنگاه با تفهیم نکات درس، قدم به قدم او را تا مقصد و مقصود علمی همراهی می‌کند. کتاب حاضر نیز بر همین شالوده بنیان نهاده شده است. نویسنده کوشیده است با کمک عبارات واضح ریاضی و توضیحات مکمل فارسی خواننده را با کمترین دردسر به آموختن مطالب سوق دهد و در برخی مسائل با ارائه راه‌حل‌های چندگانه، قوه خلاقیت را که از پیش‌نیازهای توفیق در ریاضیات است، در ذهن خواننده بپروراند.

۲. بخش‌بندی جزئی:

کتاب‌های آموزشی ریاضیات و آمار کنکور به وفور در سطح بازار موجودند اما، نوع و جنس سؤالات آزمون‌های استخدامی با آزمون‌های ورود به دانشگاه متفاوت است؛ هرچند ممکن است از یک مبحث و سرفصل طرح شده باشد. به همین دلیل، نیاز است داوطلبان پیش از مطالعه مباحث ریاضیات و آمار دیدی جامع از پی‌رنگ ذهنی طراحان سؤالات ریاضی و آمار آزمون استخدامی بدست آورند.

این کتاب با تفکیک سؤالات چندساله آزمون‌های استخدامی به فصول و زیرفصل‌های مرتبط به هم، علاوه بر دیدی جامع و کل‌نگر، با تفکیک دقیق مسائل نگرشی ژرف و عمیق نیز در بررسی سؤالات در اختیار داوطلب قرار می‌دهد. این دید کل‌نگر از بالا توأم با ژرف‌نگری ریزبینانه، خواننده را از سردرگمی می‌رهاند و یادگیری مباحث را برای او سهل‌تر می‌کند.

۳. چینش سؤالات از ساده به دشوار:

در هر مبحث دقت شده است تا ترتیب سؤالات از ساده به دشوار باشد. آغاز سؤالات سطح ساده با تک‌ستاره (*)، متوسط با دو ستاره (***) و دشوار با سه ستاره (***) به نمایش در آمده‌اند. این کار از صلیبیت مطالعه درسی مانند ریاضی می‌کاهد و با ایجاد خط سیر یادگیری^۱ انگیزه مطالعه را در خواننده قوت بخشد.

۴. یادآوری نکات ضروری:

با وجود و وفور کتب آموزشی ریاضی در بازار، نگارش درس‌نامه‌ای کامل برای هر فصل چندان حیاتی نبود. چه آنکه خواننده می‌تواند با مراجعه به این منابع، نیاز آموزشی خود را مرتفع نماید. با این حال، در خلال حل سؤالات و در مواقع لزوم، نکته‌هایی لحاظ شده است تا به خواننده در درک بهتر سؤال و پاسخ داده‌شده کمک کند. این نکات در بسته‌هایی مجزا از راه‌حل‌ها قابل مطالعه است.

با تمام اوصاف و ویژگی‌های منحصر به فرد مذکور، کتاب حاضر دست‌رنج انسان پر نقصان است و ظرافت ذاتی ریاضیات آن را خلل‌پذیرتر کرده است:

ما را نمی‌توان یافت بیرون از این دو عبرت / یا ناقص‌الکمالیم یا کامل‌القصوریم^۲
پیشاپیش، از خطاهای محتمل دانشی و ویرایشی که در حین مطالعه کتاب مواجه می‌شوید، پوزش می‌طلبم.

مایه خوش‌وقتی خواهد بود چنانچه انتقاد، پیشنهاد، دیدگاه و پرسش‌های خود را از طریق درگاه‌های زیر با بنده در میان بگذارید:

t.me/mathemajic

[Instagram.com/mathemagics](https://www.instagram.com/mathemagics) \ s.hrabbasi91@gmail.com

سپاسگزارم

بهروز و پیروز باشید.

سید حمیدرضا عباسی

^۱ Learning pathway

^۲ بیدل دهلوی

فصل اول: آمار

| | | | |
|----|---------------------------------|----|-----------------------------|
| ۲۶ | ۱-۵-۱. واریانس | ۲ | ۱-۱. انواع متغیرها |
| ۲۸ | ۱-۵-۲. انحراف معیار | ۶ | ۱-۲. دسته‌بندی داده‌ها |
| ۳۳ | ۱-۵-۳. ضریب تغییرات | | ۱-۳. فراوانی |
| ۳۷ | ۱-۵-۴. دامنه تغییرات و چارک‌ها | ۱۰ | ۱-۳-۱. فراوانی نسبی |
| | ۱-۶. نمودار | ۱۳ | ۱-۳-۲. فراوانی تجمعی |
| ۴۱ | ۱-۶-۱. نمودار دایره‌ای | | ۱-۴. شاخص‌های گرایش به مرکز |
| ۴۴ | ۱-۶-۲. نمودار ساقه-برگ | ۱۸ | ۱-۴-۱. میانگین |
| ۴۸ | ۱-۶-۳. نمودار چندبر فراوانی | ۲۳ | ۱-۴-۲. میانه |
| ۵۰ | ۱-۶-۴. نمودار میله‌ای و مستطیلی | ۲۵ | ۱-۴-۳. مد(نما) |
| | | | ۱-۵. شاخص‌های پراکندگی |

فصل دوم: مجموعه‌ها، عبارت‌های جبری و استدلال ریاضی

| | | | |
|----|----------------------------|----|--------------------------------|
| ۶۷ | ۲-۲-۲. رادیکال‌ها | | ۲-۱. مجموعه‌ها |
| ۷۵ | ۲-۲-۳. توان‌ها | ۵۴ | ۲-۱-۱. تعداد اعضای مجموعه |
| ۷۷ | ۲-۲-۴. اتحادها | ۶۱ | ۲-۱-۲. جبر مجموعه‌ها |
| ۸۱ | ۲-۲-۵. تقسیم چندجمله‌ای‌ها | | ۲-۲. عبارت‌های جبری |
| ۸۵ | ۲-۲-۶. تعیین علامت | | ۲-۲-۱. اولویت عملگرهای ریاضی و |
| ۸۶ | ۲-۳. استدلال و منطق ریاضی | ۶۵ | مفاهیم پایه |

فصل سوم: معادله و نامعادله

| | | | |
|-----|--------------------------------------|----|--------------------------------|
| ۱۰۲ | ۳-۲. معادلات گویا، رادیکالی و دستگاه | | ۳-۱. معادله درجه دو |
| ۱۱۱ | ۳-۴. نامعادله | ۹۲ | ۳-۱-۱. ریشه‌های معادله درجه دو |
| | | ۹۵ | ۳-۱-۲. روابط بین ریشه‌ها |

فصل چهارم: خط و سهمی

| | | | |
|-----|------------------|-----|----------------------------|
| | ۴-۲. سهمی | | ۴-۱. خط |
| ۱۲۶ | ۴-۲-۱. رأس سهمی | ۱۱۸ | ۴-۱-۱. معادله خط |
| ۱۲۸ | ۴-۲-۲. شکل سهمی | ۱۲۱ | ۴-۱-۲. خطوط موازی و عمود |
| ۱۳۰ | ۴-۲-۳. خط و سهمی | ۱۲۴ | ۴-۱-۳. فاصله یک نقطه از خط |

فصل پنجم: تابع

| | | | |
|-----|------------------------------|-----|------------------------|
| ۱۵۶ | ۵-۵-۳. تابع درجه دوم | ۱۳۴ | ۵-۱. مفهوم تابع |
| ۱۵۹ | ۵-۵-۴. تابع چندضابطه ای | ۱۳۹ | ۵-۲. دامنه و برد توابع |
| ۱۶۱ | ۵-۵-۵. تابع رادیکالی و نمایی | ۱۴۷ | ۵-۳. ترکیب توابع |
| ۱۶۳ | ۵-۵-۶. تابع قدرمطلق | ۱۵۲ | ۵-۴. اعمال بر روی تابع |
| ۱۶۵ | ۵-۶. تابع وارون (معکوس) | | ۵-۵. انواع توابع |
| ۱۶۸ | ۵-۷. انتقال توابع | ۱۵۴ | ۵-۵-۱. تابع جزء صحیح |
| | | ۱۵۴ | ۵-۵-۲. تابع خطی |

فصل ششم: دنباله و تصاعد

| | | | |
|-----|-------------------------------|-----|-------------------------------|
| | ۶-۲. دنباله هندسی | | ۶-۱. دنباله حسابی |
| ۱۷۶ | ۶-۱-۱. جملات دنباله هندسی | ۱۷۲ | ۶-۱-۱. جملات دنباله حسابی |
| ۱۷۸ | ۶-۱-۲. جمع جملات دنباله هندسی | ۱۷۴ | ۶-۱-۲. جمع جملات دنباله حسابی |

فصل هفتم: ترکیبیات و احتمال

| | | | |
|-----|-------------|-----|---------------------|
| ۱۹۱ | ۷-۲. احتمال | ۱۸۲ | ۷-۱. جایگشت و شمارش |
|-----|-------------|-----|---------------------|

فصل هشتم: حد، مشتق و انتگرال

| | | | |
|-----|--------------|-----|-----------|
| ۲۰۶ | ۸-۳. انتگرال | ۲۰۳ | ۸-۱. حد |
| | | ۲۰۶ | ۸-۲. مشتق |

فصل نهم: مثلثات، ماتریس، هندسه

| | | | |
|-----|--------------------------------|-----|----------------------|
| ۲۲۱ | ۹-۲-۲. دترمینان و معکوس ماتریس | ۲۰۸ | ۹-۱. مثلثات |
| ۲۲ | ۹-۳. هندسه | | ۹-۲. ماتریس |
| | | ۲۱۸ | ۹-۲-۱. ضرب ماتریس ها |

فصل دهم: محورهای مختصات، بردار، لگاریتم

| | | | |
|-----|---------------|-----|----------------------|
| ۲۳۳ | ۱۰-۳. لگاریتم | ۲۲۸ | ۱۰-۱. محورهای مختصات |
| | | ۲۳۱ | ۱۰-۲. بردار |

ای دل نگران که چشم‌هایت بر در...
شرمنده که امروز به یادت کمتر...
جز رنج چه بود سهمت از این همه عشق
مظلوم‌ترین عاشق دنیا! مادر!

تقدیم به نخستین آموزگار زندگی؛

مادر عزیزم

فصل اول

آمار

آمار

۱/۱ انواع متغیرها


(آموزش و پرورش - ۹۴)

* ۱ - کدام متغیر، کیفی ترتیبی است؟

(۳) گروه خونی (۴)

(۱) رنگ‌ها (۲) دوران تحصیل

شدت زلزله

نکته:  متغیرهای کیفی - ترتیبی با کمک الفاظ و کلمات ضمن تفکیک بین افراد، اشیاء و ... ارجحیت و ترتیب برای آن‌ها قائل می‌شود. این مقیاس‌ها می‌توانند عددی و یا غیر عددی باشند و با ایجاد ترتیب بین داده‌ها می‌توانیم آن‌ها را با هم مقایسه کنیم. مثل :

- مراحل رشد انسان (نوزادی، کودکی، نوجوانی، جوانی و ...)
- کیفیت مزه غذا (بد، متوسط، خوب)
- رتبه دانشجویان در کلاس درس (اول، دوم و ...)
- پایه‌های تحصیلی (هفتم، هشتم، نهم و ...)

پاسخ: گزینه ۲

۲ - رنگ چشم علی قهوه‌ای است. متغیرهای تصادفی X و Y رنگ چشم و طول قد هر دو نفری است که به تصادف در سمت چپ و راست علی قرار می‌گیرند. نوع متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب کدام‌اند؟ (دستگاه‌های اجرایی / فراگیر سوم - ۹۵)

(۱) کیفی اسمی - کمی پیوسته (۲) کیفی ترتیبی - کمی پیوسته

(۳) کیفی اسمی - کمی گسسته (۴) کیفی ترتیبی - کمی گسسته

◆ نکته: متغیر کمی پیوسته متغیری است که بین دو واحد آن هر نقطه یا ارزشی را می‌توان انتخاب کرد. برای مثال وزن یک شخص می‌تواند ۷۱ یا ۷۲ کیلوگرم و یا می‌تواند هر عددی بین این دو عدد باشد. (۷۱/۲۵ ، ۷۱/۳۱ و ...)

$X =$ کمی پیوسته طول قد

همچنین، رنگ چشم متغیری کیفی است و چون بین رنگ‌ها ترتیب و ارجحیتی وجود ندارد، از نوع اسمی است.

$Y =$ کیفی اسمی رنگ چشم

پاسخ: گزینه ۱

۳ - برای بررسی رنگ خودروهای ساخته‌شده توسط یک شرکت خودروساز، از چه نوع متغیری استفاده می‌شود؟ (دستگاه‌های اجرایی / فراگیر اول - ۹۴)

(۱) کیفی - ترتیبی (۲) کمی - ترتیبی

(۳) کیفی - اسمی (۴) کمی - گسسته

رنگ خودرو متغیری غیر عددی و کیفی است و چون رنگ‌ها نسبت به هم ترتیبی ندارند، در دسته کیفی / اسمی گنجانده می‌شوند.

پاسخ: گزینه ۳

۴- اگر نمره کسب‌شده معلمان در یک دوره ضمن خدمت براساس نمره صفر تا ۴، تنها به صورت عدد حسابی باشد، نوع متغیر تصادفی نمرات کدام است؟
(آموزش و پرورش - ۹۴)

- (۱) کمی پیوسته
(۲) کمی گسسته
(۳) کیفی اسمی
(۴) کیفی ترتیبی

- نمرات کسب‌شده معلمان از نوع متغیر کمی است.
- نمرات از نوع اعداد حسابی است. یعنی برای مثال بین نمره ۳ و ۴، نمره دیگری قرار ندارد. لذا گسسته است.
- بنابراین، متغیر کمی گسسته است.

پاسخ: گزینه ۲

۵- چه تعداد از متغیرهای زیر کیفی اسمی هستند؟ (فراگیر پنجم / آموزش و پرورش - ۹۷)

I. میزان آلودگی هوا II. رنگ میوه‌ها III. زبان مادری

(۱) ۳ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲

- (I) میزان آلودگی هوا: بسیار آلوده، نسبتاً آلوده، پاک: کیفی ترتیبی
(II) رنگ میوه‌ها: قرمز، نارنجی، سبز، زرد و ...: کیفی اسمی
(III) زبان مادری: گیلکی، فارسی، کردی، ترکی و ...: کیفی اسمی

پاسخ: گزینه ۴

۶- اندازه قطر تنه درختان جنگل‌های شمال جزو کدام نوع از متغیرهای تصادفی است؟
(فراگیر هفتم / آموزش و پرورش / علوم پزشکی - ۹۸)

- (۱) کیفی - ترتیبی
(۲) کیفی - اسمی
(۳) کمی - گسسته
(۴) کمی - پیوسته

اندازه قطر تنه درختان ← متغیر کمی
می تواند همه اعداد اعشاری را بپذیرد ← پیوسته
پاسخ: گزینه ۴

۷ - در بررسی علت تصادفات بین شهری، نوع متغیر کدام است؟
(دانشگاه های علوم پزشکی / وزارت بهداشت - ۹۹)

- (۱) کیفی - ترتیبی
(۲) کیفی - اسمی
(۳) کمی - پیوسته
(۴) کمی - گسسته

- علت تصادفات بین شهری از نظر نوع متغیر آماری، کیفی است.
- به دلیل آنکه علت تصادفها ترتیب طبیعی نسبت به یکدیگر ندارند، بنابراین این متغیر از نوع اسمی است.

پاسخ: گزینه ۲

۸ - در بررسی نمرات درس آمار زیستی دانشجویان یک کلاس، نوع متغیر کدام است؟
(دانشگاه های علوم پزشکی / وزارت بهداشت - ۹۹)

- (۱) کیفی - اسمی
(۲) کیفی - ترتیبی
(۳) کمی - گسسته
(۴) کمی - پیوسته

- نمرات درسی از نوع کمی است.
- یک دانش آموز می تواند نمره ای مانند c را بین دو نمره a و b ($a < c < b$) کسب کند، به همین علت از نوع پیوسته است.

پاسخ: گزینه ۴

۱/۲ دسته‌بندی داده‌ها

* ۹ - اگر (۳۲ - ۴۰)، حدود دسته سوم جدول فراوانی با ۵ دسته باشد، مرکز دسته دوم کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

(۱) ۳۰ (۲) ۲۸ (۳) ۲۶ (۴) ۲۴

طول هر دسته برابر ۸ است (۴۰ - ۳۲ = ۸). بنابراین، حدود دسته‌ها به صورت زیر است:

| | | | | | |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | | سوم | | |
| حدود دسته | ۱۶-۲۴ | ۲۴-۳۲ | ۳۲-۴۰ | ۴۰-۴۸ | ۴۸-۵۶ |
| مرکز دسته | ۲۰ | ۲۸ | ۳۶ | ۴۴ | ۵۲ |

$$\frac{۳۲ + ۲۴}{۲} = ۲۸$$

مرکز دسته دوم برابر است با میانگین اعداد ۳۲ و ۲۴:

پاسخ: گزینه ۲

۱۰ - کوچکترین داده آماری ۲۳ و بزرگترین آنها ۵۰ است. اگر این داده‌ها در ۹ طبقه دسته‌بندی شوند، مرکز دسته ششم، کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی ۹۹)

(۱) ۴۰/۵ (۲) ۴۰ (۳) ۳۹/۵ (۴) ۳۹

◆ نکته: چنانچه کوچکترین داده آماری a_{min} و بزرگترین داده a_{max} باشد، داریم:

$$a_{max} = a_{min} + nd$$

$$R = a_{max} - a_{min}$$

که n تعداد دسته‌ها و d طول هر دسته و R دامنه تغییرات داده‌ها است.

$$۵۰ = ۲۳ + ۹d \Rightarrow ۹d = ۲۷ \Rightarrow d = ۳$$

$$\text{کران بالای دسته ششم} : L_6 = a_{max} + ۶d = ۲۳ + ۶(۳) = ۴۱$$

$$C_{\epsilon} = L_{\epsilon} - \frac{d}{2} = 41 - \frac{3}{2} = 39/5$$

مرکز دسته ششم :

پاسخ: گزینه ۳


** ۱۱ - داده‌های آماری پیوسته در ۹ طبقه دسته‌بندی شده‌اند، به طوری که [۸۴, ۹۱] آخرین دسته این طبقه‌بندی است. کوچکترین داده کدام است؟ (حد پایین و بالای هر کدام از دسته‌ها یکی از داده‌های آماری است.) (فراگیر هشتم / آموزش و پرورش - ۹۹)

۲۸ (۴)

۲۴ (۳)

۲۱ (۲)

۳۴ (۱)

 نکته: برای محاسبه حد بالا و پایین دسته‌های آماری، بهره‌بردن از مفاهیم دنباله حسابی بسیار راهگشاست:

$$l_n = a + (n-1)d$$

حد پایین دسته n ام

$$L_n = a + nd$$

حد بالای دسته n ام

d : طول دسته

a : حد پایین دسته اول (کوچکترین داده)

$$d = 91 - 84 = 7$$

طول دسته

$$l_9 = a + 8d \Rightarrow a + 8(7) = 84 \Rightarrow a = 28$$

پاسخ: گزینه ۴

** ۱۲ - داده‌های آماری در بازه [۳۳, ۶۰] قرار دارند. اگر این داده‌ها در ۹ طبقه دسته‌بندی شوند، مرکز دسته وسط کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی / وزارت بهداشت - ۹۹)

۴۳/۵ (۴)

۴۳ (۳)

۴۶/۵ (۲)

۴۶ (۱)

$$d = \frac{l_{max} - l_{min}}{n} = \frac{60 - 33}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

طول دسته

دسته وسط = دسته پنجم

$$l_n = l_{min} + (n-1)d \Rightarrow l_5 = 33 + 4(3) = 45$$

$$C_5 = 45 + \frac{3}{2} = 46\frac{3}{2}$$

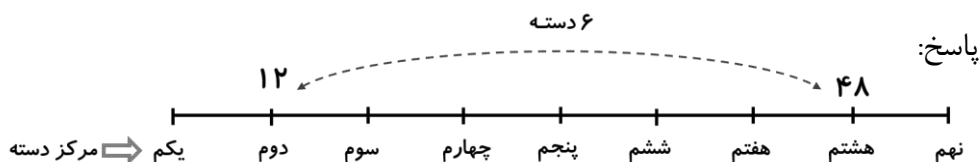
مرکز دسته وسط

پاسخ: گزینه ۲

۱۳- در دسته‌بندی داده‌های آماری، مرکز دسته دوم و هشتم به ترتیب ۱۲ و ۴۸ است.

کران بالای دسته دوازدهم کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۵)

۷۵ (۱) ۷۶ (۲) ۷۸ (۳) ۷۹ (۴)



$$\text{طول هر دسته} = \frac{48 - 12}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

$$\text{مرکز دسته دوازدهم} = 48 + 6(12 - 8) = 72$$

$$\text{کران بالای دسته دوازدهم} = 72 + \frac{6}{2} = 72 + 3 = 75$$

نکته: برای محاسبه کران بالای دسته، نصف طول دسته را به مرکز دسته اضافه می‌کنیم:

$$\text{کران بالا} = \text{مرکز دسته} + \frac{\text{طول دسته}}{2}$$

برای محاسبه کران پایین دسته، نصف طول دسته را از مرکز دسته کم می‌کنیم:

$$\text{کران پایین} = \text{مرکز دسته} - \frac{\text{طول دسته}}{2}$$

پاسخ: گزینه ۱

۱۴- داده‌های آماری در بازه $[۳۳, ۶۰]$ قرار دارند. اگر این داده‌ها در ۹ طبقه دسته‌بندی شوند، مرکز دسته وسط کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی / ۹۹)

(۱) ۴۶ (۲) ۴۶/۵ (۳) ۴۳ (۴) ۴۳/۵

$$d = \frac{l_{max} - l_{min}}{n} = \frac{60 - 33}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

طول دسته

دسته وسط = دسته پنجم

$$l_n = l_{min} + (n-1)d \Rightarrow l_5 = 33 + 4(3) = 45$$

کران پایین دسته n

$$C_5 = 45 + \frac{3}{2} = 46/5$$

مرکز دسته وسط

پاسخ: گزینه ۲

۱۵- در یک جامعه آماری، دامنه تغییرات برابر ۲۰ است. اگر کران بالای دسته آخر ۲۱ و مرکز دسته اول ۳ باشد، تعداد دسته‌ها کدام است؟ (کران پایین و بالای هر دسته عضوی از این جامعه آماری است). (فراگیر هفتم - ۹۸)

(۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۵

$$R = max - min = 20, \quad max = 21 \Rightarrow min = 1$$

مرکز دسته اول = ۳

دسته اول

۱ ۳ ۵

$$d = 2(3 - 1) = 4$$

طول هر دسته

$$n = \frac{R}{d} = \frac{20}{4} = 5$$

تعداد دسته‌ها

دسته پنجم دسته چهارم دسته سوم دسته دوم دسته اول



پاسخ: گزینه ۴

۱/۳ فراوانی

۱/۳/۱ فراوانی نسبی

* ۱۶ - جدول زیر، فراوانی نسبی مراجعات به اورژانس یک بیمارستان در ۱۲۰ روز را نشان می‌دهد. در چند روز تعداد مراجعات کمتر از ۴ مورد بوده است؟

(فراگیر چهارم / آموزش و پرورش - ۹۶)

| تعداد در یک روز | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|-----------------|--------|--------|--------|-----|--------|
| فراوانی نسبی | ۰/۲ | ۰/۱ | ۰/۲۵ | x | ۰/۳ |
| | ۹۶ (۴) | ۸۴ (۳) | ۷۲ (۲) | | ۳۶ (۱) |

راه حل اول:

◆ نکته: مجموع فراوانی‌های نسبی باید ۱ یا ۱۰۰٪ شود.

$$۰/۲ + ۰/۱ + ۰/۲۵ + x + ۰/۳ = ۱ \Rightarrow x = ۰/۱۵$$

$$۱۲۰ \times (۰/۲ + ۰/۱ + ۰/۲۵ + ۰/۱۵) = ۸۴$$

راه حل دوم:

بدون آنکه x را محاسبه کنیم، تعداد روزهای با مراجعات کمتر از ۴ نفر برابر است با:

$$۱۲۰ - (۰/۳ \times ۱۲۰) = ۸۴$$

پاسخ: گزینه ۳

۱۷ - در داده‌های دسته‌بندی شده، مجموع فراوانی‌های نسبی کدام است؟

(فراگیر پنجم / آموزش و پرورش - ۹۷)

(۲) بیشتر از یک

(۱) کمتر از یک

(۴) یک

(۳) مجموع کل فراوانی‌ها

فراوانی نسبی هر دسته در واقع نسبتی است از فراوانی کل داده‌ها. مجموع فراوانی‌های نسبی دسته‌ها برابر است با: 100% یا 1 .

پاسخ: گزینه ۴

*** ۱۸ - فراوانی نسبی ۱۲۰ داده آماری که در ۵ دسته طبقه‌بندی شده، در جدول زیر ارائه شده است. اگر فراوانی نسبی دسته دوم، دو برابر فراوانی نسبی دسته چهارم باشد، فراوانی مطلق دسته چهارم کدام است؟ (فراگیر پنجم / آموزش و پرورش - ۹۷)

| دسته‌ها | ۱-۷ | ۷-۱۳ | ۱۳-۱۹ | ۱۹-۲۵ | ۲۵-۳۱ |
|--------------|---------------|------|---------------|-------|---------------|
| فراوانی نسبی | $\frac{1}{4}$ | a | $\frac{1}{3}$ | b | $\frac{1}{6}$ |

۲۰ (۴)

۵ (۳)

۱۰ (۲)

۲۵ (۱)

(I) $a = 2b$: فراوانی نسبی دسته دوم دو برابر دسته چهارم

$$مجموع\ فراوانی\ های\ نسبی = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + a + \frac{1}{3} + b + \frac{1}{6} = 1$$

$$a + b = \frac{1}{4} \stackrel{(I)}{\Rightarrow} 3b = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{12}$$

فراوانی نسبی دسته چهارم = فراوانی مطلق دسته چهارم \times فراوانی کل

$$= \frac{1}{12} \times 120 = 10$$

پاسخ: گزینه ۲

۱۹- در جدول ناقص زیر، فراوانی نسبی دسته اول کدام است؟
(فراگیر هشتم / آموزش و پرورش - ۹۹)

| دسته | اول | دوم | سوم | چهارم |
|---------------|-----|---------|-----|---------|
| فراوانی | x | $x + 8$ | ۱۲ | $0/32c$ |
| فراوانی تجمعی | a | ۲۲ | b | c |

۰/۱۸ (۴)

۰/۰۹ (۳)

۰/۱۱ (۲)

۰/۱۴ (۱)

نکته ۱: فراوانی تجمعی دسته دوم برابر است با مجموع فراوانی‌های دسته‌های اول و دوم.

$$22 = x + (x + 8) \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7 \quad (I)$$

نکته ۲: فراوانی تجمعی دسته آخر برابر است با مجموع فراوانی تمام دسته‌ها یا به عبارتی فراوانی کل.

$$x + (x + 8) + 12 + (0/32c) = c$$

$$2x + 20 = c - 0/32c \stackrel{(I)}{\Rightarrow} 34 = 0/68c \Rightarrow c = \frac{34}{0/68} = \frac{34 \times 100}{68} = 50$$

$$f_1 = \frac{7}{50} = 0/14$$

پاسخ: گزینه ۱

۱/۳/۲ فراوانی تجمعی

* ۲۰ - در داده‌های دسته‌بندی شده، نسبت فراوانی تجمعی دسته آخر به تعداد کل داده‌ها، کدام است؟
(وزارت نیرو - ۹۷)

(۱) کمتر از یک (۲) بیشتر یا مساوی یک

(۳) یک (۴) بیشتر از یک

فراوانی تجمعی دسته آخر برابر فراوانی کل داده‌هاست.

پاسخ: گزینه ۳

۲۱ - ۲۰۰ داده در ۱۰ طبقه دسته‌بندی شده است. اگر فراوانی تجمعی دسته نهم برابر ۱۸۰ باشد، درصد فراوانی نسبی دسته دهم کدام است؟

(دانشگاه‌های علوم پزشکی / وزارت بهداشت - ۹۹)

(۱) ۱۵ (۲) ۱۷ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲
 $N = F_{10} = 200$, $F_9 = 180$

فراوانی مطلق دسته دهم برابر است با فراوانی تجمعی دسته دهم (فراوانی کل) منهای فراوانی تجمعی دسته نهم.

$$f_{10} = F_{10} - F_9 = 200 - 180 = 20$$

$$\% f_{10} = \frac{20}{200} \times 100 = 10$$

پاسخ: گزینه ۳

** ۲۲ - فراوانی تجمعی داده‌های آماری دسته‌بندی شده، به صورت جدول زیر است.

فراوانی نسبی دسته سوم کدام است؟ (فراگیر پنجم / آموزش و پرورش - ۹۷)

| دسته‌ها | ۱۲-۹ | ۱۵-۱۲ | ۱۸-۱۵ | ۲۱-۱۸ | ۲۴-۲۱ |
|---------------|------|-------|-------|-------|-------|
| فراوانی تجمعی | ۱۲ | ۲۷ | ۴۵ | ۶۵ | ۷۲ |

(۱) ۰/۲۰ (۲) ۰/۲۳ (۳) ۰/۲۵ (۴) ۰/۱۸

پاسخ:

| دسته‌ها | ۱۲-۹ | ۱۵-۱۲ | ۱۸-۱۵ | ۲۱-۱۸ | ۲۴-۲۱ |
|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| فراوانی کل | ۱۲ | ۲۷ | ۴۵ | ۶۵ | ۷۲ |
| فراوانی مطلق | ۱۲ | $۲۷-۱۲=۱۵$ | $۴۵-۲۷=۱۸$ | $۶۵-۴۵=۲۰$ | $۷۲-۶۵=۱۷$ |
| فراوانی نسبی | $\frac{۱۲}{۷۲}$ | $\frac{۱۵}{۷۲}$ | $\frac{۱۸}{۷۲}$ | $\frac{۲۰}{۷۲}$ | $\frac{۱۷}{۷۲}$ |

$$\text{فراوانی نسبی دسته سوم} = \frac{۱۸}{۷۲} = \frac{۱}{۴} = ۲۵\%$$

◆ نکته: فراوانی تجمعی آخرین دسته برابر با فراوانی کل است.

پاسخ: گزینه ۳

۲۳ - اگر نمودار فراوانی مطلق داده‌ها از دسته وسط به بعد نزولی باشد، نمودار فراوانی تجمعی چگونه تغییر می‌کند؟
(فراگیر پنجم / آموزش و پرورش - ۹۷)

(۱) بستگی به فراوانی مطلق دسته‌های ماقبل دسته وسط دارد.
(۲) ثابت
(۳) نزولی
(۴) صعودی

◆ نکته: نمودار فراوانی تجمعی هیچ‌گاه نزولی نیست. چنانچه تعداد داده‌های یک دسته صفر باشد، فراوانی تجمعی این دسته برابر فراوانی تجمعی دسته قبل می‌شود و نمودار فراوانی تجمعی آن دسته به صورت خط ثابت با شیب صفر ترسیم می‌گردد.

پاسخ: گزینه ۴

۲۴ - ۱۸۰ داده آماری را در ۱۲ دسته طبقه‌بندی می‌کنیم. اگر فراوانی تجمعی دسته یازدهم برابر ۱۷۱ باشد، درصد فراوانی نسبی دسته آخر، کدام است؟
(فراگیر هفتم / آموزش و پرورش / علوم پزشکی - ۹۸)

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) ۱۰

دسته دوازدهم، آخرین دسته است. بنابراین، فراوانی تجمعی آن برابر فراوانی کل است

$$F_{12} = N = 180, \quad F_{11} = 171$$

$$\Rightarrow f_{12} = N - F_{11} = 9$$

فراوانی مطلق دسته دوازدهم

$$\text{درصد فراوانی نسبی دسته دوازدهم} = \%r_{12} = \frac{f_{12}}{N} \times 100 = \frac{9}{180} \times 100 = 5$$

پاسخ: گزینه ۲

۲۵ - در داده‌های دسته‌بندی شده زیر تعداد داده‌ها برابر ۱۲۰ است. فراوانی تجمعی دسته ماقبل آخر کدام است؟ (فراگیر هفتم - ۹۸)

| دسته‌ها | ۰-۴ | ۴-۸ | ۸-۱۲ | ۱۲-۱۶ | ۱۶-۲۰ |
|-------------------|-----|-----|------|-------|-------|
| درصد فراوانی نسبی | ۱۰ | ۵ | ۴۰ | a | ۱۵ |

۸۴ (۴)

۹۰ (۳)

۹۶ (۲)

۱۰۲ (۱)

راه حل اول:

$$10 + 5 + 40 + a + 15 = 100\% \Rightarrow a = 30\%$$

| دسته | ۰-۴ | ۴-۸ | ۸-۱۲ | ۱۲-۱۶ | ۱۶-۲۰ |
|-------------------|----------------------------------|---------------|------|-------|-------|
| درصد فراوانی نسبی | ۱۰ | ۵ | ۴۰ | ۳۰ | ۱۵ |
| فراوانی مطلق | $\frac{10}{100} \times 120 = 12$ | ۶ | ۴۸ | ۳۶ | ۱۸ |
| فراوانی تجمعی | ۱۲ | $6 + 12 = 18$ | ۶۶ | ۱۰۲ | ۱۲۰ |

راه حل دوم:

$$F_5 = 120 \times 15\% = 18 \quad \text{فراوانی مطلق دسته پنجم}$$

$$F_4 = 120 - 18 = 102 \quad \text{فراوانی تجمعی دسته چهارم}$$

پاسخ: گزینه ۱

۲۶- در جدول روبه‌رو، مقدار $a + c$ چقدر است؟ (آزمون فراگیر نهم/وزارت علوم - ۱۴۰۰)

| داده‌ها | A | B | C | D |
|---------------|---|----|---|----|
| فراوانی | ۸ | a | b | ۶ |
| فراوانی تجمعی | ۸ | ۱۵ | c | ۲۷ |

۲۸ (۴)

۲۹ (۳)

۳۰ (۲)

۲۶ (۱)

$$a + 8 = 15 \Rightarrow a = 15 - 8 = 7$$

$$b + 15 = c \quad (I)$$

$$6 + c = 27 \Rightarrow c = 27 - 6 = 21 \xrightarrow{(I)} b = 21 - 15 = 6$$

$$a + c = 7 + 21 = 28$$

پاسخ: گزینه ۴

*** ۲۷ - صد و بیست داده آماری در ۹ دسته طبقه‌بندی شده‌اند. درصد فراوانی تجمعی نسبی در دسته‌های چهارم و پنجم به ترتیب ۵۲ و ۶۸ است. فراوانی مطلق دسته وسط کدام است؟ (وزارت نیرو - ۹۶)

| شماره دسته | ... | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ... | ۹ |
|-----------------------------|-----|---|----|----|---|-----|-----|
| (%) درصد فراوانی تجمعی نسبی | | | ۵۲ | ۶۸ | | | ۱۰۰ |

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

راه حل اول:

نکته: از تفاضل فراوانی تجمعی نسبی دسته n از دسته $n + 1$ ، فراوانی نسبی دسته $n + 1$ بدست می آید.

بنابراین درصد فراوانی نسبی دسته پنجم:

$$68 - 52 = 16\%$$

از آنجایی که بین ۹ دسته، دسته پنجم وسط محسوب می شود، لذا برای محاسبه فراوانی مطلق دسته پنجم کافی است درصد فراوانی نسبی را در تعداد کل دادهها (۱۲۰) ضرب کنیم:

$$\frac{16}{100} \times 120 = 19.2 \quad \text{فراوانی مطلق دسته پنجم}$$

راه حل دوم:

$$\%F_{r_f} = 52 \Rightarrow \frac{F_f}{120} = \frac{52}{100} \Rightarrow F_f = 52 \times \frac{120}{100}$$

$$\%F_{r_\Delta} = 68 \Rightarrow \frac{F_\Delta}{120} = \frac{68}{100} \Rightarrow F_\Delta = 68 \times \frac{120}{100}$$

: فراوانی مطلق دسته پنجم

$$f_\Delta = F_\Delta - F_f = \left(68 \times \frac{120}{100}\right) - \left(52 \times \frac{120}{100}\right) = (68 - 52) \times \frac{120}{100}$$

$$f_\Delta = 16 \times \frac{120}{100} = 19.2$$

▲ جواب صحیح در گزینهها موجود نیست. ▲

۲۸ - ۱۲۰ داده آماری در ۹ طبقه دسته بندی شده اند. درصد فراوانی تجمعی نسبی در دسته های چهارم و پنجم به ترتیب ۶۷ و ۸۲ است. فراوانی دسته پنجم کدام است؟
(دانشگاه های علوم پزشکی / وزارت بهداشت - ۹۹)

۲۰ (۴)

۱۸ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)

نکته:

$$100 \times \frac{\text{فراوانی تجمعی دسته } i}{\text{فراوانی کل}} = \frac{(F_i)}{(F)} \text{ درصد فراوانی تجمعی نسبی دسته } i$$

$$F = 120, \quad \%F_{r_f} = 67, \quad \%F_{r_\Delta} = 82$$

$$\frac{67}{100} = \frac{F_f}{120} \Rightarrow F_f = 80/4$$

$$\frac{82}{100} = \frac{F_\Delta}{120} \Rightarrow F_\Delta = 98/4$$

$$f_\Delta = F_\Delta - F_f = 98/4 - 80/4 = 18$$

پاسخ: گزینه ۳

۱/۴ شاخص‌های گرایش به مرکز

۱/۴/۱ میانگین

* ۲۹ - جامعه آماری با ۱۵ داده به صورت زیر، دسته‌بندی شده است. میانگین جامعه کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

| مرکز دسته | ۹ | ۱۳ | ۱۷ | ۲۱ |
|-----------|---|----|----|----|
| فراوانی | ۴ | ۵ | ۲ | ۴ |

$$15/9 \text{ (۴)}$$

$$14/6 \text{ (۳)}$$

$$13/9 \text{ (۲)}$$

$$12/6 \text{ (۱)}$$

$$\bar{X} = \frac{(9 \times 4) + (13 \times 5) + (17 \times 2) + (21 \times 4)}{4 + 5 + 2 + 4}$$

$$\bar{x} = \frac{۳۶ + ۶۵ + ۳۴ + ۸۴}{۱۵} = \frac{۲۱۹}{۱۵} \cong ۱۴/۶$$

پاسخ: گزینه ۳

۳۰ - میانگین داده‌های یک مطالعه آماری ۱۲ است. اگر همه این داده‌ها را بر ۳ تقسیم کنیم و یک واحد به آنها بیفزاییم و در مرحله آخر، داده‌های جدید را دو برابر کنیم، میانگین داده‌های مرحله آخر، کدام است؟ (وزارت نیرو - ۹۶)

(۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

میانگین داده‌های اولیه $\bar{x} = ۱۲ \Rightarrow x_1, x_2, \dots, x_n$

$$۲\left(\frac{x_1}{۳} + ۱\right), ۲\left(\frac{x_2}{۳} + ۱\right), \dots, ۲\left(\frac{x_n}{۳} + ۱\right) \Rightarrow \bar{x}' = ۲\left(\frac{\bar{x}}{۳} + ۱\right) = \frac{۲}{۳}\bar{x} + ۲ \quad \text{میانگین داده‌های جدید}$$

$$\Rightarrow \bar{x}' = \frac{۲}{۳}(۱۲) + ۲ = ۱۰$$

پاسخ: گزینه ۴

** ۳۱ - در جدول فراوانی تجمعی زیر، میانگین داده‌ها کدام است؟

(دستگاه‌های اجرایی / فراگیر دوم - ۹۴)

| مرکز دسته | ۲۵ | ۲۶ | ۲۷ | ۲۸ | ۲۹ |
|---------------|----|----|----|----|----|
| فراوانی تجمعی | ۸ | ۲۴ | ۴۴ | ۶۸ | ۸۰ |

(۱) ۲۶/۸ (۲) ۲۷/۱ (۳) ۲۷/۲ (۴) ۲۶/۷

برای محاسبه میانگین داده‌ها به فراوانی مطلق هر دسته نیازمندیم.

برای بدست آوردن فراوانی مطلق هر دسته، کفایست فراوانی تجمعی دسته را از فراوانی تجمعی دسته ماقبل کم کنیم. حاصل، فراوانی مطلق آن دسته خواهد بود.

| مرکز دسته | ۲۵ | ۲۶ | ۲۷ | ۲۸ | ۲۹ |
|---------------|----|----|----|----|----|
| فراوانی تجمعی | ۸ | ۲۴ | ۴۴ | ۶۸ | ۸۰ |
| فراوانی مطلق | ۸ | ۱۶ | ۲۰ | ۲۴ | ۱۲ |

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum x_i} = \frac{\overset{200}{(25 \times 8)} + \overset{416}{(26 \times 16)} + \overset{540}{(27 \times 20)} + \overset{672}{(28 \times 24)} + \overset{348}{(29 \times 12)}}{80}$$

$$\bar{x} = \frac{2176}{80} = 27/2$$

نکته: فراوانی کل برابر است با فراوانی تجمعی دسته آخر.

پاسخ: گزینه ۳

۳۲ - در جدول فراوانی تجمعی زیر، میانگین کدام است؟

(فراگیر هشتم / آموزش و پرورش - ۹۹)

| حدود دسته | ۰-۲ | ۲-۴ | ۴-۶ | ۶-۸ |
|---------------|-----|-----|-----|-----|
| فراوانی تجمعی | ۱ | ۲ | ۱۲ | ۱۶ |

۹ (۴)

۱۱/۳۷۵ (۳)

۱۲/۶۲۵ (۲)

۵ (۱)

| مرکز دسته | ۱ | ۳ | ۵ | ۷ |
|--------------|---|-------|---------|---------|
| فراوانی مطلق | ۱ | ۲-۱=۱ | ۱۲-۲=۱۰ | ۱۶-۱۲=۴ |

$$\bar{X} = \frac{(1 \times 1) + (3 \times 1) + (5 \times 10) + (7 \times 4)}{16}$$

۱۶ ←
فراوانی کل

$$\bar{X} = \frac{82}{16} = \frac{41}{8} = \frac{40+1}{8} = 5 + \frac{1}{8} = 5.125$$

پاسخ: گزینه ۱

*** ۳۳ - در جدول فراوانی مطلق زیر، میانگین برابر ۱۶ است. مقدار a کدام است؟

(فراگیر هفتم / آموزش و پرورش / علوم پزشکی - ۹۸)

| حدود دسته | ۱۲-۸ | ۱۶-۱۲ | ۲۰-۱۶ | ۲۴-۲۰ |
|-----------|------|-------|-------|-------|
| فراوانی | ۴ | A | ۴ | ۵ |

۵ (۴)

۷ (۳)

۹ (۲)

۱۱ (۱)

میانگین برابر است با تقسیم مجموع حاصل ضرب فراوانی در مرکز دسته بر فراوانی کل

| حدود دسته | ۱۲-۸ | ۱۶-۱۲ | ۲۰-۱۶ | ۲۴-۲۰ | |
|----------------------------|------|-------|-------|-------|-----------|
| مرکز دسته | ۱۰ | ۱۴ | ۱۸ | ۲۲ | مجموع |
| فراوانی | ۴ | a | ۴ | ۵ | $۱۳+a$ |
| فراوانی \times مرکز دسته | ۴۰ | $۱۴a$ | ۷۲ | ۱۱۰ | $۲۲۲+۱۴a$ |

$$\bar{X} = \frac{222 + 14a}{13 + a} = 16 \Rightarrow 222 + 14a = 208 + 16a \Rightarrow 2a = 14 \Rightarrow a = 7$$

پاسخ: گزینه ۳

۳۴ - میانگین ۱۳ داده، برابر ۶ است. اگر همه داده‌ها به جز a را دو برابر کنیم و با ۱ جمع کنیم، میانگین برابر ۱۱ می‌شود. مقدار a کدام است؟

(فراگیر هشتم / آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) ۲۵ (۲) ۵۱ (۳) ۴۶ (۴) ۳۷

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{13}, a : \bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{13} + a}{13} = 6$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{13} = (13 \times 6) - a = 78 - a \quad (I)$$

$$2x_1 + 1, 2x_2 + 1, 2x_3 + 1, \dots, 2x_{13} + 1, a : \bar{X}' = 11$$

$$\bar{X}' = \frac{(2x_1 + 1) + (2x_2 + 1) + \dots + (2x_{13} + 1) + a}{13} = 11$$

$$\bar{X}' = \frac{2(x_1 + x_2 + \dots + x_{13}) + 12 + a}{13} = 11$$

$$2(\underbrace{x_1 + x_2 + \dots + x_{13}}_{(I)}) + 12 + a = 13 \times 11 = 143$$

$$2(78 - a) + 12 + a = 143 \Rightarrow 156 - 2a + 12 + a = 143 \Rightarrow a = 25$$

پاسخ: گزینه ۱

۳۵ - از بین داده‌های ۴، ۷، ۱۰، ۱۲، کدام داده تغییر کند تا میانه، میانگین و دامنه

تغییرات یکسان و برابر ۸ شوند؟ (فراگیر هشتم / آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) فقط ۱۲ (۲) ۷ یا ۱۲ (۳) ۴ یا ۱۲ (۴) فقط ۱۰

داده‌ها به ترتیب: ۴، ۷، ۱۰، ۱۲

$$\text{میانه } \tilde{X} = \frac{7 + 10}{2} = 8.5$$

$$\bar{X} = \frac{4 + 7 + 10 + 12}{4} = \frac{33}{4} = 10.75$$

$$R = 12 - 4 = 8$$

از آنجایی که دامنه تغییرات برابر ۸ است، بنابراین نیازی به تغییر کوچکترین و بزرگترین داده نیست.

از طرفی برای تغییر میانه به ۸، باید میانگین دو داده وسط ۸ شود. بنابراین چنانچه مجموع دو داده ۱۶ باشد، این مورد تأمین است.

$$4, a, b, 12$$

$$\tilde{x} = 8 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 8 \Rightarrow a+b = 16 \quad (\text{I})$$

$$\bar{x} = \frac{4+a+b+12}{4} = 8 \Rightarrow a+b = 16 \quad (\text{II})$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود با توجه به دو شرط (I) و (II) چنانچه مجموع دو عدد a و b ، ۱۶ شود، میانگین و میانه (هر دو) برابر ۸ خواهد شد.

با این شرط که: $b > a$, $a > 4$, $b < 12$

| a | b | $a + b$ |
|-----|-----|---------|
| ۵ | ۱۱ | ۱۶ |
| ۶ | ۱۰ | ۱۶ |
| ۷ | ۹ | ۱۶ |
| ۸ | ۸ | ۱۶ |
| ... | ... | ۱۶ |

حال، با تغییر داده‌های ۷ یا ۹ تغییرات مدنظر حاصل می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲

۱/۴/۲ میانه

* ۳۶ - میانه داده‌های آماری ۳، ۱۰، ۷، ۱، ۵، ۱۲، ۲، ۹، ۴، ۱۶ کدام است؟

(دستگاه‌های اجرایی / فراگیر اول - ۹۴)

۸ / ۵ (۴)

۷ / ۵ (۳)

۶ / ۵ (۲)

۶ (۱)

مرتب‌سازی داده‌ها: ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۷, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۶

دو داده ۷, ۵ در وسط قرار دارند. بنابراین برای محاسبه میانه از این دو میانگین می‌گیریم

$$\text{میانه } m_d = \frac{7+5}{2} = 6$$

پاسخ: گزینه ۱

*** ۳۷- اگر میانگین داده‌های ۳, ۶, ۱-ا, ۴, ۲ برابر ۳ باشد، میانه داده‌های

۷, ۱۵, ۱۰, ۵ا, a, ۲ا, ۱۳, ۴ کدام است؟ (آزمون فراگیر نهم / وزارت علوم - ۱۴۰۰)

(۱) ۸/۵ (۲) ۴/۵ (۳) ۶ (۴) ۷

$$\bar{X} = \frac{2+4+(a-1)+6+3}{5} = 3 \Rightarrow 14+a=15 \Rightarrow a=1$$

مرتب‌سازی
۴, ۱۳, ۲, ۱, ۵, ۱۰, ۱۵, ۷ → ۱, ۲, ۴, ۵, ۷, ۱۰, ۱۳, ۱۵

$$\tilde{X} = \frac{5+7}{2} = 6$$

میانگین دو داده وسط برابر با میانه است:

پاسخ: گزینه ۳

*** ۳۸- با توجه به جدول فراوانی ناقص زیر، میانه در کدام دسته قرار دارد؟

(فراگیر هشتم / آموزش و پرورش - ۹۹)

| دسته‌ها | اول | دوم | سوم | چهارم |
|--------------|------|-----|-----|-------|
| فراوانی | ۳ | a | ۶ | ۷ |
| فراوانی نسبی | ۰/۱۵ | b | x | y |

(۴) دوم

(۳) سوم

(۲) چهارم

(۱) اول

$$F = 3 + a + 6 + 7 = 16 + a$$

$$f_{r1} = \frac{3}{16+a} = 0.15 \Rightarrow 16+a = \frac{3}{0.15} = \frac{300}{15} = 20$$

$$16+a=20 \Rightarrow a=4 \Rightarrow N=16+4=20$$

فراوانی کل برابر ۲۰ است. بنابراین میانه برابر با میانگین داده‌های دهم و یازدهم است.

$$F_1 = 3, F_2 = 3+4=7, F_3 = 7+6=13$$

از آنجا که فراوانی تجمعی دسته دوم ۷ و فراوانی تجمعی دسته سوم ۱۳ است، بنابراین میانه در دسته سوم قرار دارد.

پاسخ: گزینه ۳

۱/۴/۳ مد(نما)

۳۹ - میانگین و میانه یک جامعه به ترتیب ۴۰ و ۵۰ است. در صورتی که جامعه از چولگی معقولی برخوردار باشد مد آن تقریباً چند خواهد بود؟

(آموزش و پرورش - ۹۴)

۷۰ (۴)

۵۰ (۳)

۴۵ (۲)

۱۰ (۱)

نکته: چنانچه داده‌ها به شکل متقارن توزیع شده باشند و جامعه از چولگی معقولی

برخوردار باشد، می‌توان رابطه تقریبی زیر را برای میانگین، میانه و مد(نما) نوشت:

$$\bar{X} = \frac{3m_d - m_p}{2}$$



\bar{X} : میانگین



m_d : میانه



m_p : مد(نما)



بنابراین، مطابق اطلاعات سؤال خواهیم داشت:

$$۴۰ = \frac{۳(۵۰) - m_p}{۲} \Rightarrow m_p = ۳(۵۰) - ۲(۴۰) = ۷۰$$

پاسخ: گزینه ۴

۱/۵ شاخص‌های پراکندگی

۱/۵/۱ واریانس

* ۴۰ - واریانس داده‌های ۱۲۹۹، ۱۳۰۲، ۱۳۰۳، ۱۳۰۴، ۱۳۰۷، ۱۳۰۲ کدام است؟

(آموزش و پرورش - ۹۴)

۶ (۴)

۶/۸ (۳)

۴ (۲)

۴/۵ (۱)

مرتب‌سازی داده‌ها: ۱۲۹۹، ۱۳۰۲، ۱۳۰۳، ۱۳۰۴، ۱۳۰۷

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{۱۲۹۹ + ۱۳۰۲ + ۱۳۰۳ + ۱۳۰۴ + ۱۳۰۷}{۵} = \frac{۵(۱۳۰۰) + ۱۵}{۵} = ۱۳۰۰ + \frac{۱۵}{۵} = ۱۳۰۳$$

یا

$$۱۲۹۹, ۱۳۰۲, ۱۳۰۳, ۱۳۰۴, ۱۳۰۷$$

$\begin{array}{ccccccc} & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & \\ & -۳ & -۱ & +۱ & +۳ & & \end{array}$

نکته: همانگونه که مشاهده می‌شود، فاصله اعداد پیش و پس از ۱۳۰۳ یکسان است.

بنابراین میانگین، عدد وسط (۱۳۰۳) می‌باشد.

$$\sigma^2 = \frac{۴^2 + ۱^2 + ۰^2 + ۱^2 + ۴^2}{۵} = \frac{۳۴}{۵} = ۶/۸$$

پاسخ: گزینه ۳

۴۱ - واریانس داده‌های ۱۲۵۶، ۱۲۵۸، ۱۲۶۰، ۱۲۵۹ و ۱۲۵۷ کدام است؟

(آموزش و پرورش - ۹۴)

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۲/۵ (۴) ۲۳۸

۱۲۵۶، ۱۲۵۸، ۱۲۶۰، ۱۲۵۹، ۱۲۵۷

اولین گام: مرتب کردن داده‌ها از کوچک به بزرگ

۱۲۵۶، ۱۲۵۷، ۱۲۵۸، ۱۲۵۹، ۱۲۶۰

گام دوم: میانگین ← از آنجایی که داده‌ها با آهنگ یکسانی زیاد می‌شوند (۱ واحد، ۱

واحد)، میانگین برابر است با داده وسط (میان)

$$\bar{x} = 1258$$

گام سوم: محاسبه واریانس

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

یکی یکی داده‌ها را از میانگین کم می‌کنیم و به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sigma^2 = \frac{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

پاسخ: گزینه ۱

** ۴۲ - اگر واریانس داده‌های آماری $d - 4$ و $c - 1$ و $b + 1$ و 10 برابر صفر باشد،

میانگین d, c, b, a کدام است؟ (تأمین اجتماعی - ۹۳ و ۹۴)

(۱) ۱۲ (۲) ۱۱ (۳) ۱۰ (۴) ۹

◆ نکته: چنانچه واریانس مجموعه‌ای از داده‌های آماری صفر باشد، آن داده‌ها با هم

برابرند.

$$a = b + 1 = c - 1 = d - 4 = 10 \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 9 \\ c = 11 \\ d = 14 \end{cases}$$

$$9, 10, 11, 14 \quad \bar{X} = \frac{9 + 10 + 11 + 14}{4} = 11$$

پاسخ: گزینه ۲

۴۳ - واریانس داده‌های $\underbrace{1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1}_{54}$ کدام است؟ (وزارت نیرو - ۹۶)

۱) صفر (۲) ۱/۵ (۳) ۲/۵ (۴) ۳/۵

مجموع داده‌ها برابر صفر است، در نتیجه میانگین مساوی با صفر خواهد بود.

$$\bar{X} = \frac{1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + 1 + (-1)}{54} = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{(1-0)^2 + (-1-0)^2 + \dots + (-1-0)^2}{54} \\ &= \frac{\overbrace{1+1+1+\dots+1}^{\text{تا } 54}}{54} = \frac{54}{54} = 1 \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۲

۱/۵/۲ انحراف معیار

* ۴۴ - اگر ۱۴۰۲، ۱۴۰۴، ۱۴۰۱، ۱۴۰۳، ۱۴۰۰ داده‌های جمع‌آوری شده در یک مطالعه

آماري باشند، انحراف معیار کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی / وزارت بهداشت - ۹۹)

۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۴۰۰، ۱۴۰۱، ۱۴۰۲، ۱۴۰۳، ۱۴۰۴

نکته: از آنجایی که داده‌ها به‌طور متوالی، یک‌واحد یک‌واحد افزایش می‌یابند، میانگین برابر داده وسط است.

$$\bar{X} = 1402$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5}$$

تفاضل داده‌ها از میانگین

$$\sigma^2 = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2}$$

پاسخ: گزینه ۱

** ۴۵ - انحراف معیار داده‌های آماری ۷۴، ۶۲، ۷۰، ۶۶ و ۷۸ کدام است؟

دستگاه‌های اجرایی / فراگیر دوم - ۹۴

$$4\sqrt{2} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$2\sqrt{2} \quad (1)$$

گام اول: مرتب کردن داده‌ها

۶۲، ۶۶، ۷۰، ۷۴، ۷۸

گام دوم: محاسبه میانگین

$$\begin{array}{cccccc} 62 & , & 66 & , & 70 & , & 74 & , & 78 \\ \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ +4 & & +4 & & +4 & & +4 & & \end{array}$$

همانگونه که مشاهده می‌شود، داده‌های مرتب‌شده، به صورت سسم چهار واحد با هم

اختلاف دارند. بنابراین داده وسط میانگین است: $\bar{x} = 70$

گام سوم: محاسبه واریانس

$$\sigma^2 = \frac{1}{5} (8^2 + 4^2 + 0^2 + 4^2 + 8^2) = \frac{2}{5} (8^2 + 4^2) = \frac{2}{5} (80) = 32$$

گام چهارم: محاسبه انحراف معیار

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

پاسخ: گزینه ۴

۴۶ - انحراف معیار ۱۱ داده آماری صفر است. اگر مجموع مجذورات داده‌ها ۵۳۹ باشد،

نما (مُد) در این داده‌ها کدام است؟ (فراگیر هشتم / آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۶

انحراف معیار داده‌ها صفر است. بنابراین داده‌ها با هم برابرند.

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{11} = a \quad (I)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{11}^2 = 539 \stackrel{(I)}{\Rightarrow} 11a^2 = 539 \Rightarrow a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$$

همه داده‌ها برابر ۷ هستند. بنابراین نما (مُد) برابر همین عدد است.

پاسخ: گزینه ۱

۴۷ - انحراف معیار داده‌های ۴، $\frac{c}{2}$ ، $b - 1$ ، $2a$ برابر صفر است. میانگین داده‌های

a ، b ، c کدام است؟ (آزمون فراگیر نهم / وزارت علوم - ۱۴۰۰)

(۱) ۵ (۲) صفر (۳) ۴ (۴) ۳

: داده‌ها برابرند \Rightarrow انحراف معیار داده‌ها برابر صفر

$$\begin{cases} 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \\ b - 1 = 4 \Rightarrow b = 5 \\ \frac{c}{2} = 4 \Rightarrow c = 8 \end{cases}$$

$$\bar{X} = \frac{a+b+c}{3} = \frac{2+5+8}{3} = 5$$

پاسخ: گزینه ۱

*** ۴۸ - اگر انحراف معیار داده‌های x_1, x_2, \dots, x_{15} برابر صفر باشد، میانه داده‌های زیر کدام است؟ (فراگیر پنجم / آموزش و پرورش - ۹۷)

$$2x_1 + 1, 2(x_2 + 1), 2x_3 + 1, \dots, 2(x_{15} + 1), 49, 57$$

۴۹ (۴)

۳۲ (۳)

۳۱ (۲)

۵۷ (۱)

انحراف معیار داده‌ها برابر صفر است. در نتیجه، تمام داده‌ها با هم مساویند.

$\sigma = 0 \Rightarrow$ داده‌ها با هم برابرند

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{15} = 15$$

$$2x_1 + 1, 2(x_2 + 1), 2x_3, \dots, 2(x_{15} + 1), 49, 57$$

$$i = \text{فرد} : 2x_i + 1 = 2(15) + 1 = 31$$

$$i = \text{زوج} : 2(x_i + 1) = 2(15 + 1) = 32$$

همانطور که دیده می‌شود از x_1 تا x_{15} ، چنانچه جمله فرد باشد برابر ۳۱ و جملات زوج مساوی با ۳۲ هستند.

$$\underbrace{31, 32, 31, 32, \dots, 32, 49, 57}_{10 \text{ ت}}$$

مرتب می‌کنیم:

$$\underbrace{31, 31, \dots, 31}_{5 \text{ ت}}, \underbrace{32, 32, \dots, 32}_{5 \text{ ت}}, 49, 57$$

تعداد داده‌ها ۱۲ تا است، بنابراین میانه برابر است با میانگین داده ششم و هفتم.

$$\text{تعداد داده‌ها} = 12 \Rightarrow \text{میانه} = \frac{\text{داده ششم} + \text{داده هفتم}}{2} = 32$$

پاسخ: گزینه ۳

۴۹- مجموع ۵۰ داده آماری برابر ۲۵۰ و مجموع مربعات داده‌ها برابر ۱۷۰۰ است. انحراف معیار داده‌ها کدام است؟ (فراگیر هفتم - ۹۸)

(۱) ۱۶ (۲) ۹ (۳) ۴ (۴) ۳

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{50} = 250 \Rightarrow \bar{x} = \frac{250}{50} = 5$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{50}^2 = 1700$$

◆ نکته:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum x_i^2 + \sum \bar{x}^2 - 2\bar{x} \sum x_i}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} + \bar{x}^2 - 2\bar{x} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1700}{50} - (5)^2 = 34 - 25 = 9 \Rightarrow \sigma = 3$$

پاسخ: گزینه ۴

۵۰- انحراف معیار ۷ داده آماری از میانگین آن‌ها، به صورت اعداد متوالی بدست آمده است. انحراف معیار این داده‌ها کدام است؟

(فراگیر هشتم / آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) ۲ (۲) ۹ (۳) ۴ (۴) ۳

◆ نکته: چنانچه فاصله داده‌ها از میانگین، اعداد متوالی باشند، داده وسط برابر با میانگین است.

با توجه به نکته فوق، داده چهارم برابر با میانگین است.

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \Rightarrow x_4 = \bar{X}$$

$$x_i - \bar{X} \downarrow$$

$$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2}{7}$$

$$\sigma^2 = \frac{2(14)}{7} = 4 \Rightarrow \sigma = 2$$

پاسخ: گزینه ۱

۱/۵/۳ ضریب تغییرات

* ۵۱ - دو جامعه دارای مقیاس‌های اندازه‌گیری متمایز هستند، برای مقایسه پراکندگی داده‌های آماری دو جامعه، کدام شاخص مناسب است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

۱) ضریب تغییرات ۲) دامنه تغییرات ۳) واریانس ۴) انحراف معیار

ضریب تغییرات از تقسیم انحراف معیار (σ) بر میانگین \bar{X} بدست می‌آید. به عبارت دیگر، ضریب تغییرات میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین است.

نکته: ضریب تغییرات مقداری بی‌بعد است. لذا برای مقایسه پراکندگی داده‌های آماری دو جامعه با مقیاس‌های متفاوت مناسب‌ترین است.

پاسخ: گزینه ۱