

بسمہ تعالیٰ

دینامیک جو۔ اقیانوس

جوزف اچ. لاکاسکی

ترجمہ:

دکتر سعید ملا اسماعیل پور

زمستان ۱۴۰۱

پیش‌گفتار مترجم

دینامیک جو و اقیانوس تا اندازه‌ی زیادی غیرخطی است. غیرخطی بودن، دلیل آشفتگی این سیستم‌ها و در نتیجه، غیر قابل پیش‌بینی بودن آنهاست. با این حال، کل درک ما از این سیستم‌ها، ناشی از مطالعه‌ی معادلات خطی حرکت می‌باشد. این معادلات به‌لحاظ ریاضی قابل تحلیل هستند (برخلاف اکثراً همتایان غیرخطی آنها)، به این معنی که می‌توانیم جواب‌های آنها را پیدا کنیم. این جواب‌ها شامل امواج گرانشی، امواج راسبی و تشکیل توفان است که همه‌ی آنها قابل مشاهده هستند. بنابراین دینامیک خطی، درک ما را از سیستم‌های واقعی بالا می‌برد.

این کتاب ترجمه‌ی کتاب «Atmosphere-Ocean Dynamics» تألیف جوزف اچ. لاکاسکی استاد دانشگاه اسلو نروژ می‌باشد. این کتاب مشتمل بر چهار فصل است. در فصل اول معادلات، در فصل دوم جریانات باروتروپیک (فشارگرایی)، در فصل سوم جریانات باروکلینیک (چگال‌گرایی) بحث می‌گردد و سرانجام فصل چهارم به پیوست اختصاص یافته است. این کتاب برای دانشجویان فیزیک دریا، هواشناسی، فیزیک، مکانیک سیالات و رشته‌های مرتبط مهندسی بسیار مفید است.

در خاتمه، هرگونه نظر و پیشنهادی از سوی دانشجویان، خوانندگان و همکاران محترم در جهت بهبود کیفیت این کتاب با نشانی و ایمیل esmaeilpour@aut.ac.ir موجب امتنان خواهد بود.

دکتر سعید ملا اسماعیل پور

زمستان ۱۴۰۱

فهرست مطالب

۷	فصل اول.....
۷	معادلات.....
۸	۱-۱- معادلات اولیه.....
۱۳	۲-۱- روابط ژئوستروفیک.....
۱۶	۳-۱- تعادل هیدرواستاتیک.....
۱۹	۴-۱- تقریبات.....
۱۹	۱-۴-۱- تقریب صفحهٔ بتا.....
۲۰	۲-۴-۱- تقریب بوسینسک.....
۲۲	۳-۴-۱- مختصات فشار.....
۲۴	۵-۱- باد گرمایی.....
۲۸	۶-۱- معادلهٔ تاوایی.....
۳۰	۱-۶-۱- قضیهٔ کلوین.....
۳۱	۲-۶-۱- معادلهٔ تاوایی شبه ژئوستروفیک.....
۳۴	۷-۱- لایه‌های مرزی.....
۳۹	۸-۱- مسائل.....
۴۲	فصل دوم.....
۴۲	جریان‌ات باروتروپیک (فشارگرایی).....
۴۳	۱-۲- معادلهٔ تاوایی پتانسیل باروتروپیک.....
۴۶	۲-۲- کانتورهای ژئوستروفیک.....
۵۲	۳-۲- امواج باروتروپیک راسبی.....
۵۲	۲-۳-۱- خطی سازی.....
۵۳	۲-۳-۲- جواب‌های موج.....

۵۵	۲-۳-۳- سرعت فاز موج راسبی
۵۸	۲-۳-۴- انتشار به سمت غرب: مکانیسم
۶۲	۲-۳-۵- سرعت گروه
۶۵	۲-۴- انعکاس موج راسبی
۶۹	۲-۵- امواج کوهستان
۷۶	۲-۶- چرخش پایین
۷۷	۲-۷- گلف استریم
۸۶	۲-۸- حوضه‌های اقیانوسی بسته
۹۳	۲-۹- ناپایداری باروتروپیکی
۹۵	۲-۹-۱- معیار ریلی-کیو
۹۹	۲-۹-۲- مثال‌ها
۱۰۷	۲-۱۰- مسائل
۱۱۱	فصل سوم
۱۱۱	جریان‌ات باروکلینیک (چگال‌گرایی)
۱۱۲	۳-۱- معادله چگالی
۱۱۴	۳-۲- تاوایی پتانسیل شبه ژئوستروفیک (QG)
۱۱۵	۳-۳- خلاصه
۱۱۶	۳-۴- شرایط مرزی
۱۱۷	۳-۵- امواج باروکلینیک راسبی
۱۱۸	۳-۵-۱- مدهای باروکلینیکی با لایه‌بندی ثابت
۱۲۳	۳-۵-۲- مدهای باروکلینیکی با لایه‌بندی نمایی
۱۲۶	۳-۵-۳- مشاهدات امواج باروکلینیک راسبی
۱۲۹	۳-۶- امواج کوهستان

۱۳۳	۳-۷- امواج توپوگرافی.....
۱۳۶	۳-۸- ناپایداری باروکلینیکی.....
۱۳۷	۳-۸-۱- مکانیسم پایه.....
۱۳۸	۳-۸-۲- معیار چارنی- استرن.....
۱۴۴	۳-۹- مدل ایدی.....
۱۵۸	۳-۱۰- مسائل.....
۱۶۲	فصل چهارم.....
۱۶۲	پیوست‌ها.....
۱۶۳	۴-۱- پیوست الف: قضیه کلونین.....
۱۶۵	۴-۲- پیوست ب: جواب در لایه اکمن.....
۱۶۷	۴-۳- پیوست پ: انرژی امواج راسبی.....
۱۷۰	۴-۴- پیوست ت: معیار فیورتافت.....
۱۷۱	۴-۵- پیوست ث: QGPV در مختصات فشار.....
۱۷۵	واژه‌نامه.....

فصل اول

معادلات

۱-۱- معادلات اولیه

معادلات اولیه معادلات کاملی هستند که چگونگی تغییر متغیرهای مهم، سرعت، چگالی و غیره را نسبت به زمان بیان می‌کنند. برای نوشتن آنها به مشتق نیاز داریم. یک متغیر اسکالر (نرده‌ای) برای مثال چگالی ρ ، که هم نسبت به زمان و هم نسبت به مکان تغییر می‌کند، را در نظر بگیرید، طبق قاعده زنجیری^۱، تغییر کل در ρ برابر است با:

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz \quad (۱)$$

بنابراین:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho \quad (۲)$$

سمت چپ معادله، مشتق لاگرانژ و سمت راست معادله، مشتق اویلری می‌باشد. فرمول لاگرانژی برای اندازه‌گیری‌های متحرک، مانند بالون‌ها یا رانش‌گرها، به کار برده می‌شود، در حالی که فرمول اویلری برای اندازه‌گیری‌های ثابت، مانند ایستگاه‌های هواشناسی یا جریان‌سنج‌ها استفاده می‌شود. در چارچوب لاگرانژی، چگالی تنها تابعی از زمان است، بنابراین، آن مشتق تام (کل) است. اما در شکل اویلری، چگالی تابعی از مکان و زمان است. از این‌رو، مشتق زمانی در سمت راست معادله، مشتق جزئی است (و مشتق محلی^۲ نامیده می‌شود).

هم در جو و هم در اقیانوس، سرعت‌ها با استفاده از معادلات ناویر-استوکس^۳ یا معادلات تکانه^۴ کنترل می‌شوند. فرض کنید ما در یک ناحیه مسطح در سطح زمین و در مرکز عرض جغرافیایی θ قرار داریم. معادلات عبارتند از:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + 2\Omega w \cos \theta - 2\Omega v \sin \theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x \quad (۳)$$

^۱ Chain rule

^۲ local derivative

^۳ Navier-Stokes equations

^۴ Momentum equations

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + 2\Omega u \sin \theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y \quad (۴)$$

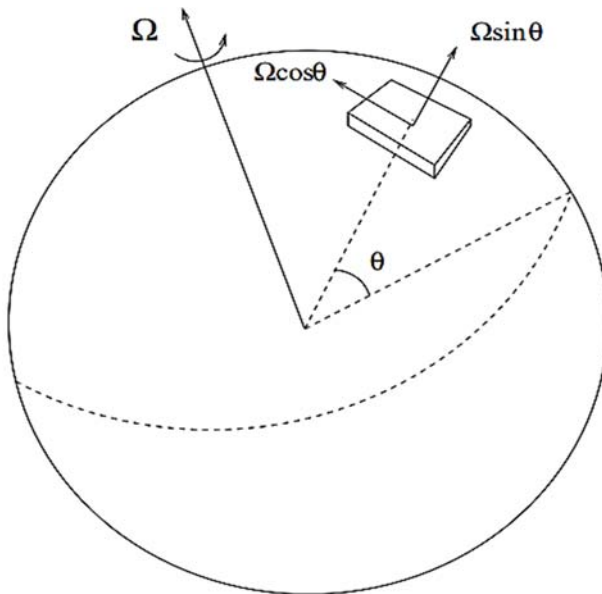
$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - 2\Omega w \cos \theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z \quad (۵)$$

در اینجا x, y و z به ترتیب، جهت‌های محلی شرقی-غربی، شمال-جنوب و قائم هستند و (u, v, w) سرعت‌های متناظر می‌باشند. ρ چگالی، p فشار و g نیز ثابت گرانشی است که برابر 9.8 m/sec^2 است و:

$$\Omega = \frac{2\pi}{86400} \text{ sec}^{-1}$$

نرخ چرخش زمین می‌باشد.

این معادلات از قانون دوم نیوتن، یعنی $F = ma$ گرفته شده‌اند.



شکل ۱- ناحیه‌ای از جو در عرض جغرافیایی θ . به بردار چرخش روی محورهای z و y در مختصات محلی توجه کنید.

دو نوع نیرو وجود دارد؛ واقعی و ظاهری. نیروهای واقعی ناشی از گرادیان‌های فشار (p)، گرانش (g) و اصطکاک (F_i) می‌باشند. این نیروها برای ما کاملاً آشنا هستند، اما نیروهای ظاهری کمتر آشنا هستند. نیروهای ظاهری به دلیل چرخش زمین به وجود می‌آیند. شخصی را بر روی زمین، در موقعیت \vec{r} و ناظر ثابتی را در نظر بگیرید که از فضا به او نگاه می‌کند. می‌توان نشان داد که ناظر دوم می‌بیند:

$$\vec{u}_F = \vec{u}_R + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (6)$$

این بیان می‌کند که سرعت فرد اندازه‌گیری شده از فضا (چارچوب ثابت)، برابر است با سرعت او (در چارچوب چرخان) به اضافه سرعت چرخش زمین. حتی اگر شخص ثابت بایستد، ناظر ثابت متوجه می‌شود که او در حال حرکت است، زیرا او به دور قطب می‌چرخد. به‌طور مشابه، می‌توان نشان داد:

$$\left(\frac{d\vec{u}_F}{dt}\right)_F = \left(\frac{d\vec{u}_R}{dt}\right)_R + 2\vec{\Omega} \times \vec{u}_R + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

بنابراین شتاب در چارچوب ثابت دارای دو عبارت اضافی؛ شتاب کوریولیس و شتاب گریز از مرکز می‌باشد. شتاب گریز از مرکز (جمله آخر) عمود بر محور چرخش زمین عمل می‌کند و نسبت به زمان ثابت است. می‌توان آن را به جمله گرانشی داخل کرد و بعدها آن را نادیده گرفت. از طرفی، نیروی کوریولیس به سرعت بستگی دارد. آن عمود بر سرعت عمل می‌کند و باعث تغییر جهت سرعت می‌شود، اما مقدار سرعت را تغییر نمی‌دهد.^۱ برای ناحیه مسطح می‌توان، شتاب را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} 2\vec{\Omega} \times \vec{u} &= (0, 2\Omega \cos\theta, 2\Omega \sin\theta) \times (u, v, w) \\ &= 2\Omega(w \cos\theta - v \sin\theta, u \sin\theta, -u \cos\theta) \end{aligned} \quad (7)$$

برای جمله‌های اصطکاک، می‌توانیم فرض کنیم که میرایی مولکولی در مقیاس‌های کوچک اتفاق می‌افتد. از این‌رو، می‌نویسیم:

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = \nu \nabla^2 \vec{u} = \nu \nabla^2 (u, v, w) \quad (8)$$

^۱ به همین دلیل، نیروی کوریولیس کاری انجام نمی‌دهد.

که در آن ν لزجت مولکولی^۱ است و مقدار آن از مرتبه $10^{-5} \text{ m}^2/\text{sec}$ می‌باشد. همچنین، معادله پیوستگی^۲ وجود دارد که پایستگی (بقای) جرم را بیان می‌کند:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = \frac{d}{dt} \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (9)$$

این را می‌توان با توجه به شار جرم از طریق حجم بی‌نهایت کوچک اویلری، یا با نوشتن پایستگی جرم برای حجم لاگرانژی (مثلاً بخش ۱-۴-۳) به دست آورد. شکل لاگرانژی معادله بیان می‌کند که در صورت تغییر حجم، چگالی تغییر می‌کند، و اگر جریان واگرا باشد، دومی رخ می‌دهد.

علاوه بر این چهار معادله، یک «معادله حالت» داریم که برای اقیانوس، چگالی را به دما و شوری مربوط می‌کند. در جو، چگالی و دما از طریق قانون گاز ایده‌آل به هم مربوط می‌گردند:

$$p = \rho RT \quad (10)$$

در این رابطه، $R = 287 \text{ J/Kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ثابت گاز برای هوای خشک است. لذا، این قانون برای گاز خشک (یعنی گاز بدون رطوبت) بسیار مناسب است، اما اگر دما را با «دمای مجازی» جای‌گزین کنیم، معادله مشابهی در حضور رطوبت استفاده می‌شود.^۳ در اقیانوس، هم شوری و هم دما بر چگالی تأثیر می‌گذارند. این وابستگی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\rho = \rho(T, S) = \rho_c(1 - \alpha_T(T - T_{ref}) + \alpha_S(S - S_{ref})) + \text{h.o.t.} \quad (11)$$

در این رابطه ρ_c ثابت است و T_{ref} و S_{ref} مقادیر مرجع برای دما (T) و شوری (S) می‌باشند. همچنین h.o.t. به معنای «جملات مرتبه بالاتر» است. افزایش دما یا کاهش شوری، باعث کاهش چگالی آب (سبک‌تر شدن آب) می‌شود. نکته مهم این است که تصحیحات دما و شوری بسیار کم‌تر از یک است، به طوری که چگالی توسط عبارت اول، یعنی ρ_c که یک

¹ Molecular viscosity

² Continuity equation

^۳ برای اطلاعات بیشتر به کتاب هولتون (Holton)، مقدمه‌ای بر هواشناسی دینامیک مراجعه کنید.

ثابت است، غالب می‌گردد که این را در بخش (۱-۳) در ایجاد تقریب بوسینسک استفاده خواهیم کرد.

ما به یک معادلهٔ اضافی دیگر برای اتمسفر نیاز داریم، و این بیان می‌کند که چگونه سیستم به گرمایش پاسخ می‌دهد. این معادلهٔ انرژی ترمودینامیکی است:

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = c_p \frac{dT}{dt} - \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{dp}{dt} = J \quad (12)$$

این معادله از قانون اول ترمودینامیک مشتق شده است که بیان می‌کند، گرمای اضافه شده به حجم منهای کار انجام شده توسط حجم برابر با تغییر انرژی داخلی آن است. در اینجا c_p و c_v به ترتیب، گرمای ویژه در حجم و فشار ثابت هستند و J نشان دهندهٔ گرمایش است. بنابراین، گرمایش باعث تغییر دما و همچنین فشار و چگالی هوا می‌شود. با این حال، ما از یک معادلهٔ متفاوت ولی مرتبط، مربوط به دمای پتانسیل را استفاده خواهیم کرد. دمای پتانسیل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\theta = T \left(\frac{p_s}{p} \right)^{R/c_p} \quad (13)$$

این دمایی است که اگر بسته‌ای به صورت بی‌دررو یا آدیاباتیک (با گرمایش صفر) به فشار مرجع منتقل شود، خواهد داشت. معمولاً فشار در سطح زمین در نظر گرفته می‌شود. مزیت آن این است که می‌توانیم معادلهٔ انرژی ترمودینامیک را فقط برحسب یک متغیر بنویسیم:

$$c_p \frac{d(\ln \theta)}{dt} = \frac{1}{T} J \quad (14)$$

این رابطه ساده‌تر از رابطهٔ (۱۲) است، زیرا فشار را شامل نمی‌گردد. این نشان می‌دهد که دمای پتانسیل بستهٔ هوا در صورت عدم گرمایش پایسته می‌ماند ($J = 0$)، به‌عنوان مثال:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (15)$$

از این معادلات می‌توان برای مدل‌سازی جو یا اقیانوس استفاده کرد. با این حال، این معادلات کوپل (جفت شده) و غیرخطی هستند و به صورت تحلیلی حل نمی‌شوند! بدون

جواب تحلیلی، درک دقیق نحوه رفتار آنها بسیار دشوار است. هدف ما کاهش معادلات به مجموعه‌ای ساده‌تر است. معادلات جدید که در مقیاس‌های سینوپتیک یا آب و هوا استفاده می‌شوند، را می‌توان با مقیاس‌بندی سیستماتیک معادلات فوق به دست آورد. اینها معادلات شبه ژئوستروفیک^۱ هستند. به دلیل سادگی این معادلات، کار کردن با آنها و نیز درک آنها بسیار ساده‌تر است.

۱-۲- روابط ژئوستروفیک

همه جملات موجود در معادلات تکانه افقی به یک اندازه مهم نیستند. برای اینکه ببینیم کدامها غالب هستند، معادلات را مقیاس‌بندی می‌کنیم. معادله تکانه x را در نظر بگیرید:

$$\frac{U}{T} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{UW}{D} \quad 2\Omega W \quad 2\Omega U \quad \frac{\Delta_H p}{\rho L} \quad \frac{vU}{L^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u + w \frac{\partial}{\partial z} u + 2\Omega w \cos \theta - 2\Omega v \sin \theta \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p + \nu \nabla^2 u \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\Omega T} \quad \frac{U}{2\Omega L} \quad \frac{U}{2\Omega L} \quad \frac{W}{2\Omega D} \quad \frac{W}{U} \quad 1 \quad \frac{\Delta_H p}{2\Omega \rho UL} \quad \frac{\nu}{2\Omega L^2}$$

در خط دوم (معادله وسطی)، معادله را با در نظر گرفتن مقادیر معمولی برای متغیرها مقیاس‌بندی کرده‌ایم. در خط سوم، بر مقیاس شتاب دوم کوریولیس، یعنی بر 2Ω (که فرض کردیم مهم است) تقسیم کرده‌ایم. پارامترهای حاصله همه بی‌بعد هستند، یعنی یکا (واحد) ندارند.

برای تخمین این پارامترها، از مقادیر معمول سیستم‌های آب و هوایی استفاده می‌کنیم:

$$U \approx 10 \text{ m/sec}, \quad 2\Omega = \frac{4\pi}{86400 \text{ sec}} \approx 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$$

¹ Quasi-geostrophic

$$L \approx 10^6 \text{m}, \quad D \approx 10^4 \text{m}, \quad T = L/U \approx 10^5 \text{sec}$$

$$\Delta_H P/\rho \approx 10^3 \text{m}^2/\text{sec}^2, \quad W \approx 1 \text{cm/sec} \quad (۱۶)$$

مقیاس افقی، ۱۰۰۰ کیلومتر، مقیاس سینوپتیک (همدیدی) است. توجه کنید که ما فرض می‌کنیم، مقیاس در جهت‌های X و Y یکسان است. به‌طور مشابه، تنها از یک مقیاس سرعت برای U و V استفاده می‌کنیم؛ اگرچه سرعت قائم مقیاس متفاوتی دارد، چون حرکت قائم در مقیاس‌های افقی بسیار ضعیف‌تر است.

مقیاس زمانی، متناسب با مقیاس طول، تقسیم بر مقیاس سرعت، مقیاس زمانی فرارفت است.

با مقیاس زمانی فرارفت، داریم:

$$\frac{1}{2\Omega T} = \frac{U}{2\Omega L} \equiv \epsilon$$

بنابراین جمله اول هم اندازه جملات دوم و سوم است. این پارامتر عدد راسبی می‌باشد. در مقیاس‌های سینوپتیک، این تقریباً به‌صورت زیر است:

$$\frac{U}{2\Omega L} = 0.1$$

بنابراین سه جمله اول کوچک‌تر از جمله دوم کوریولیس هستند. هرچند، جملات دیگر حتی کوچک‌تر نیز می‌باشند:

$$\frac{W}{2\Omega D} = 0.01, \quad \frac{W}{U} = 0.001$$

و بنابراین می‌توان آن را نادیده گرفت. جمله اصطکاک نیز مطابق با مقیاس زیر بسیار کوچک است:

$$\frac{\nu U}{2\Omega UL^2} \approx 10^{-13}$$

در نهایت، جمله گرادیان فشار به صورت زیر مقیاس می شود:

$$\frac{\Delta p_H}{2\Omega\rho UL} = 1$$

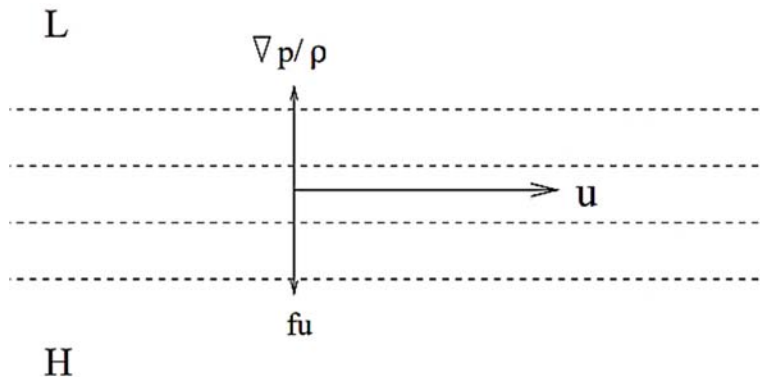
و بنابراین از نظر اندازه با جمله دوم کوریولیس قابل مقایسه است.

مقیاس بندی های فوق برای جو نیز قابل انجام می باشند و استفاده از مقادیر مربوط به اقیانوس نتایج مشابهی را به همراه دارد. علاوه بر این، مقیاس بندی معادله تکانه γ با معادله تکانه x یکسان است. بنابراین، تعادلات غالب به صورت زیر می باشند:

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (17)$$

$$fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (18)$$

که در آن $f \equiv 2\Omega \sin\theta$ مؤلفه قائم پارامتر کوریولیس است. اینها روابط ژئوستروفیک، تعادل اولیه در جهت افقی در مقیاس های سینوپتیکی هستند. بنابراین اگر میدان فشار را بدانیم، می توانیم سرعت ها را پیدا کنیم. توجه کنید که چون $f \equiv 2\Omega \sin\theta$ ، در نیم کره جنوبی منفی است. بنابراین جریان در شکل (۲) به سمت غرب خواهد بود و نیروی کوریولیس به سمت چپ عمل می کند. علاوه بر این، نیروی کوریولیس در استوا دقیقاً صفر است. در نتیجه، تعادل ژئوستروفیک در آنجا برقرار نمی باشد.



شکل ۲- تعادل ژئوستروفیک (زمین گرد)

۱-۳- تعادل هیدرواستاتیک

اکنون معادلهٔ تکانه قائم را مقیاس‌بندی می‌کنیم. برای این منظور، ما به تخمینی از تغییرات قائم فشار نیاز داریم که متفاوت از تغییرات افقی است:

$$\Delta_V P / \rho \approx 10^5 \text{ m}^2/\text{sec}^2$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} w + u \frac{\partial}{\partial x} w + v \frac{\partial}{\partial y} w + w \frac{\partial}{\partial z} w - 2\Omega u \cos \theta \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p - g + v \nabla^2 w \end{aligned} \quad (19)$$

$\frac{WU}{L}$	$\frac{UW}{L}$	$\frac{UW}{L}$	$\frac{W^2}{D}$	$2\Omega U$	$\frac{\Delta_V P}{\rho D}$	g	$\frac{vW}{L^2}$
$\frac{UW}{gL}$	$\frac{UW}{gL}$	$\frac{UW}{gL}$	$\frac{W^2}{gD}$	$\frac{2\Omega U}{g}$	$\frac{\Delta_V P}{g\rho D}$	1	$\frac{vW}{gL^2}$

10^{-8}	10^{-8}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-4}	1	1	10^{-20}
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----	-----	------------

توجه کنید که با فرض بزرگ بودن، جملات را بر g تقسیم کرده‌ایم. می‌بینیم که گرادیان فشار قائم و جملات گرانشی بسیار بزرگ‌تر از جملات دیگر هستند. بنابراین، معادلهٔ تکانهٔ قائم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial z} p = -\rho g \quad (20)$$

این رابطهٔ هیدرواستاتیک می‌باشد.

این یک ساده‌سازی فوق‌العاده نسبت به معادلهٔ کامل تکانه قائم است. با این حال، توجه داشته باشید که در صورت نبود حرکت، همان تعادل اعمال می‌شود. اگر در معادلهٔ تکانهٔ قائم $u = v = w = 0$ را قرار دهیم، همان تعادل به دست می‌آید. بنابراین، تعادل ممکن است، برای بخش دینامیکی (متحرک) جریان چندان مرتبط نباشد.

اکنون فشار و چگالی را به مؤلفه‌های استاتیکی و دینامیکی تفکیک می‌کنیم:

$$p(x, y, z, t) = p_0(z) + p'(x, y, z, t)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t) \quad (21)$$

مؤلفه‌های دینامیکی معمولاً بسیار کوچک‌تر از مؤلفه‌های استاتیکی هستند، به طوری که:

$$|p'| \ll |p_0|, \quad |\rho'| \ll |\rho_0| \quad (22)$$

بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p - g &= -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial}{\partial z} (p_0 + p') - g \\ &\approx -\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{\partial}{\partial z} (p_0 + p') - g \\ &\approx -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} p' + \left(\frac{\rho'}{\rho_0^2}\right) \frac{\partial}{\partial z} p_0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} p' - \frac{\rho'}{\rho_0} g \end{aligned} \quad (23)$$

توجه کنید که از جملات متناسب با حاصل ضرب متغیرهای دینامیکی، نظیر $p'\rho'$ صرف نظر می‌کنیم.

چگونه عبارت‌های فشار دینامیکی را مقیاس کنیم؟ اندازه‌گیری‌ها نشان می‌دهند که تغییرات قائم p' قابل مقایسه با تغییرات افقی می‌باشند:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} p' \propto \frac{\Delta_H P}{\rho_0 D} \approx 10^{-1} \text{ m/sec}^2$$

چگالی اغتشاش ρ' ، تقریباً $1/100$ اندازه چگالی استاتیکی است، بنابراین:

$$\frac{\rho'}{\rho_0} g \approx 10^{-1} \text{ m/sec}^2$$

¹ Perturbation density

برای مقیاس‌بندی اینها، دوباره بر g تقسیم می‌کنیم که هر دو جمله از مرتبه 10^{-2} می‌باشند. بنابراین، در حالی که آنها کوچک‌تر از جملات استاتیک هستند، هنوز به‌لحاظ اندازه، دو مرتبه بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین جمله بعدی در رابطه (۱۹) هستند. بنابراین، معادله تقریبی تکانه قائم، هم‌چنان تعادل هیدرواستاتیکی است (به جز فشار اغتشاش و چگالی):

$$\frac{\partial}{\partial z} p' = -\rho' g \quad (24)$$

تقریب هیدرواستاتیک به اندازه‌ای خوب است که در اکثر مدل‌های عددی به جای معادله تکانه قائم کامل استفاده می‌شود. مدل‌هایی که از مدل دوم استفاده می‌کنند، نادرتر هستند و مدل‌های «غیر هیدرواستاتیک»^۱ نامیده می‌شوند. هرچند مقادیر داده شده فوق برای جو است، اما مقیاس‌بندی با استفاده از مقادیر اقیانوسی، همان نتیجه را به دنبال خواهد داشت. بنابراین، تعادل هیدرواستاتیک یک تقریب عالی در هر دو سیستم است.

¹ non-hydrostatic

۴-۱- تقریبات

در ادامه چند تقریب را توضیح می‌دهیم که باعث ساده‌تر شدن معادلات می‌گردد.

۱-۴-۱- تقریب صفحه بتا^۱

با مقیاس‌سازی، می‌بینیم که مؤلفه افقی عبارت کوریولیس، یعنی $2\Omega \cos\theta$ ، از معادلات تکانه حذف می‌شود. جمله‌ای که باقی می‌ماند مؤلفه قائم، یعنی، $2\Omega \sin\theta$ است که ما این را f می‌نامیم. البته قابل ذکر است، در حالی که تمام جملات دیگر در معادلات تکانه در مختصات دکارتی هستند، f تابعی از عرض جغرافیایی است. برای رفع این مشکل، ما بر روی دامنه محدودی از عرض‌های جغرافیایی تمرکز می‌کنیم. سپس می‌توانیم f را در باب عرض جغرافیایی مرکزی (θ_0) ، با سری تیلور بسط دهیم:

$$f(\theta) = f(\theta_0) + \frac{df}{d\theta}(\theta_0)(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{d\theta^2}(\theta_0)(\theta - \theta_0)^2 + \dots \quad (25)$$

از جملات مرتبه بالاتر صرف‌نظر می‌کنیم، به طوری که:

$$f \approx f(\theta_0) + \frac{df}{d\theta}(\theta_0)(\theta - \theta_0) \equiv f_0 + \beta y \quad (26)$$

که در آن:

$$f_0 = 2\Omega \sin(\theta_0)$$

$$\beta = \frac{1}{a} \frac{df}{d\theta}(\theta_0) = \frac{2\Omega}{a} \cos(\theta_0)$$

و

$$y = a(\theta - \theta_0)$$

که در آن a شعاع زمین است.

^۱ β -plane

رابطه (۲۶) را تقریب صفحه بتا می‌نامیم. بنابراین f تنها تابعی از y است، یعنی در جهت شمال-جنوب. متعاقب بسط تیلور، جمله خطی باید بسیار کوچک‌تر از f_0 باشد، به طوری که:

$$\frac{\beta L}{f_0} \ll 1$$

این محدوده عرض جغرافیایی، یعنی L را محدود می‌کند، زیرا:

$$L \ll \frac{f_0}{\beta} = \frac{2\Omega \sin(\theta)}{2\Omega \cos(\theta)/a} = a \tan(\theta_0) \approx a \quad (27)$$

بنابراین، L باید کوچک‌تر از شعاع زمین باشد (شعاع زمین تقریباً ۶۴۰۰ کیلومتر است). از آنجایی که جمله β بسیار کوچک‌تر از جمله f_0 است، می‌توانیم آن را در روابط ژئوستروفیک نادیده بگیریم. به طور خاص، می‌توانیم بنویسیم:

$$v = \frac{1}{f\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{1}{f_0\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (28)$$

و به همین ترتیب:

$$u \approx -\frac{1}{f_0\rho} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (29)$$

با این حال، روابط هنوز غیرخطی هستند، زیرا جملات سمت راست، حاصل ضرب چگالی و فشار می‌باشند. در دو بخش بعدی به رفع این مشکل می‌پردازیم.

۱-۴-۲- تقریب بوسینسک^۱

در جو، چگالی زمینه ρ_0 به طور قابل توجهی با ارتفاع تغییر می‌کند. با این حال، در اقیانوس، چگالی به ندرت تغییر می‌کند. این باعث می‌شود که از تقریب بوسینسک استفاده

¹ Boussinesq approximation

کنیم. در این حالت، چگالی را به جز در عبارت شناوری سمت راست رابطه هیدرواستاتیک (۲۴)، ثابت می‌گیریم.

با انجام تقریب بوسینسک، روابط ژئوستروفیک به صورت زیر در می‌آیند:

$$-f_0 v_g = -\frac{1}{\rho_c} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (30)$$

$$f_0 u_g = -\frac{1}{\rho_c} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (31)$$

که در آن ρ_c چگالی ثابت در رابطه (۱۱) است. اکنون جملات موجود در سمت راست معادله، خطی هستند. این ساده‌سازی تأثیر مهمی دارد، زیرا همین امر باعث می‌شود که سرعت‌های ژئوستروفیک به صورت افقی ناواگرا^۱ باشند. به خصوص:

$$\frac{\partial}{\partial x} u_g + \frac{\partial}{\partial y} v_g = -\frac{1}{\rho_c f_0} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} + \frac{1}{\rho_c f_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = 0 \quad (32)$$

این ناواگرایی به این دلیل است که سرعت‌های ژئوستروفیک که افقی هستند، بسیار بزرگ‌تر از سرعت‌های قائم می‌باشند. تحت تقریب بوسینسک، معادله پیوستگی نیز تا حدودی ساده‌تر است.

در حالت خاص، اگر $\rho_0 = \rho_c$ قرار دهیم، به دست می‌آوریم:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (33)$$

بنابراین، سرعت‌های کل (3-D) ناواگرا هستند، یعنی جریان تراکم‌ناپذیر است و در اقیانوس‌شناسی اغلب از این فرض استفاده می‌گردد.

¹ non-divergent

۱-۴-۳- مختصات فشار

ما نمی‌توانیم تقریب بوسینسک را با اطمینان برای جَو استفاده کنیم، مگر احتمالاً در لایهٔ مرزی سیاره‌ای (این کار اغلب مثلاً هنگام در نظر گرفتن لایهٔ اکمن سطحی انجام می‌گیرد). اما اگر مختصات قائم را به جای ارتفاع به فشار تغییر دهیم، می‌توان به همین ساده‌سازی‌ها دست یافت. ما این کار را با بهره‌گیری از تعادل هیدرواستاتیک انجام می‌دهیم. یک سطح فشار را در دو بُعد (X, Z) در نظر بگیرید. با استفاده از قاعدهٔ زنجیری در سطح داریم:

$$\Delta p = \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z = 0 \quad (۳۴)$$

با جای‌گزینی رابطهٔ هیدرواستاتیک، به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x - \rho g \Delta z = 0 \quad (۳۵)$$

به‌طوری‌که:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_z = \rho g \left. \frac{\Delta z}{\Delta x} \right|_p \equiv \rho \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_p \quad (۳۶)$$

که در آن اندیس‌ها مشتقات گرفته شده در مختصات قائم (Z) و فشار (p) را نشان می‌دهند و Φ ژئوپتانسیل^۱ است:

$$\Phi \equiv \int_0^z g dz \approx gz \quad (۳۷)$$

(لازم به‌ذکر است که g تا حدودی با ارتفاع از سطح زمین تغییر می‌کند). انجام این تغییر، چگالی را از معادلهٔ تکانه حذف می‌کند، زیرا:

^۱ Geopotential

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p \Big|_z \rightarrow -\nabla \Phi \Big|_p$$

بنابراین تعادل ژئوستروفیک در مختصات فشار به صورت زیر ساده می‌گردد:

$$f_0 v_g = \frac{\partial}{\partial x} \Phi, \quad f_0 u_g = -\frac{\partial}{\partial y} \Phi \quad (38)$$

همانند تقریب بوسینسک، جملات سمت راست، اکنون خطی هستند. بنابراین در مختصات فشار، سرعت‌های افقی نیز در حالت افقی ناواگرا هستند. علاوه بر این، تغییر مختصات نیز معادله پیوستگی را ساده می‌کند. می‌توانیم این را با اعمال تبدیل مختصات، مستقیماً به رابطه (۹) نشان دهیم، اما انجام آن به صورت زیر ساده‌تر است.

یک جعبه لاگرانژی با حجم زیر را بعد از اعمال تعادل هیدرواستاتیک، در نظر بگیرید:

$$\delta V = \delta x \delta y \delta z = -\delta x \delta y \frac{\delta p}{\rho g} \quad (39)$$

جرم جعبه عبارت است از:

$$\delta M = \rho \delta V = -\frac{1}{g} \delta x \delta y \delta p$$

طبق پایستگی جرم، داریم:

$$\frac{1}{\delta M} \frac{d}{dt} \delta M = \frac{-g}{\delta x \delta y \delta p} \frac{d}{dt} \left(-\frac{\delta x \delta y \delta p}{g} \right) = 0 \quad (40)$$

با مرتب‌سازی، داریم:

$$\frac{1}{\delta x} \delta \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{1}{\delta y} \delta \left(\frac{dy}{dt} \right) + \frac{1}{\delta p} \delta \left(\frac{dp}{dt} \right) = 0 \quad (41)$$

اگر $0 \rightarrow \delta$ ، به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial p} = 0 \quad (۴۲)$$

که در آن w (در هواشناسی «أمگا» نامیده می‌شود) سرعت عمود بر سطح فشار است (همان‌طور که w عمود بر سطح Z است). مانند تقریب بوسینسک، جریان در مختصات فشار، تراکم‌ناپذیر است.

معادله هیدرواستاتیک نیز تحت مختصات فشار، شکل متفاوتی به خود می‌گیرد. با استناد به قانون گاز کامل (رابطه ۱۰)، می‌توان نوشت:

$$dp = -\rho g dz = -\rho d\Phi \quad (۴۳)$$

بنابراین:

$$\frac{d\Phi}{dp} = -\frac{1}{\rho} = -\frac{RT}{p} \quad (۴۴)$$

مختصات فشار، معادلات را به‌طور قابل توجهی ساده می‌کند، اما کار کردن با آن‌ها در مدل‌های نظری دشوار است. اصولاً مرز پایینی جو (سطح زمین) در مختصات Z نشان داده می‌شود (مثلاً به صورت $Z = 0$). از آنجایی که فشار در سطح زمین تغییر می‌کند، کم‌تر واضح است که چه مقدار مرزی برای p استفاده شود. بنابراین، در ابتدا از مختصات Z استفاده می‌کنیم. اما جواب‌ها در مختصات p نیز اغلب بسیار مشابه هستند.

۱-۵- باد گرمایی^۱

اگر روابط ژئوستروفیک و هیدرواستاتیک را با هم ترکیب کنیم، روابط باد گرمایی به دست می‌آید. اینها اطلاعاتی در مورد برش سرعت به ما می‌دهند. به‌عنوان مثال، اگر از تعادل ژئوستروفیک برای v ، بعد از استفاده از رابطه (۴۴)، نسبت به p ، مشتق بگیریم، داریم:

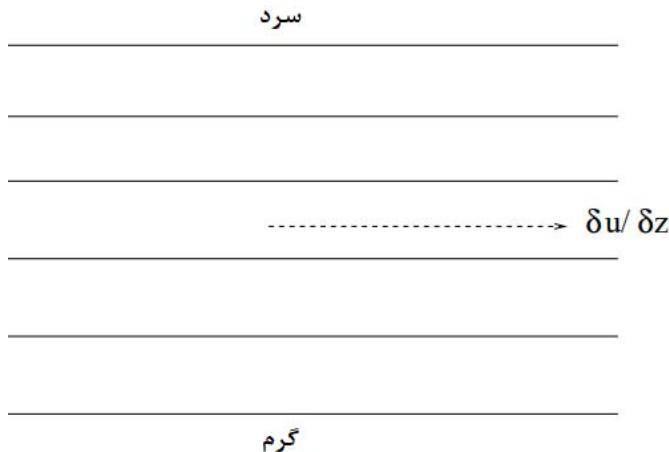
^۱ Thermal wind

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial p} = - \frac{R}{pf} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (۴۵)$$

توجه کنید که p از مشتق x بیرون می‌آید، زیرا در سطح هم فشار (p) ثابت است، یعنی آنها متغیرهای مستقل هستند. به همین ترتیب، پس از استفاده از رابطه هیدرواستاتیک (۴۴)، داریم:

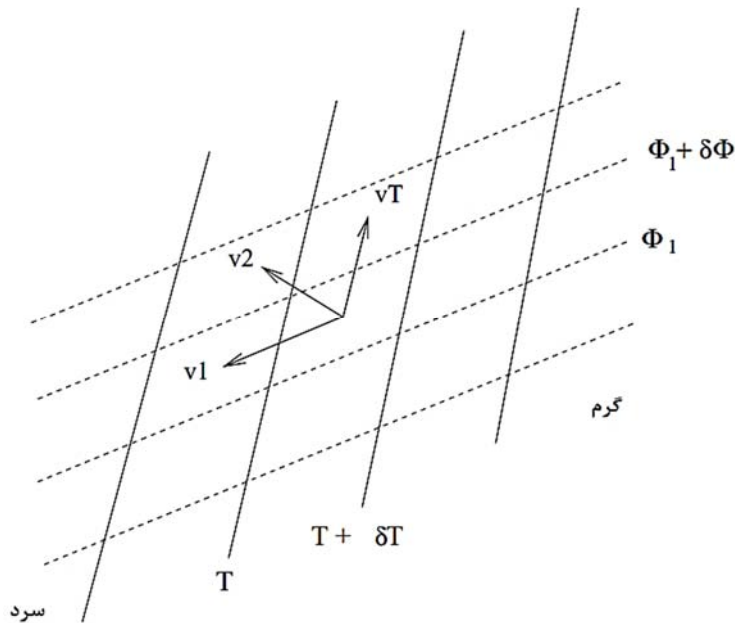
$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{R}{pf} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (۴۶)$$

بنابراین برش قائم متناسب با گرادیان‌های جانبی دما است. باد گرمایی موازی با کانتورهای دما است و باد گرم در سمت راست آن قرار دارد. برای مشاهده این، شکل (۳) را در نظر بگیرید. یک گرادیان دما در y وجود دارد، به این معنی که برش صرفاً در جهت x است. دما به سمت شمال کاهش می‌یابد، بنابراین گرادیان منفی است. از رابطه (۴۶) داریم که $\partial u / \partial p$ نیز منفی است. این نشان می‌دهد که $\partial u / \partial z$ مثبت است (زیرا فشار به سمت بالا، کاهش می‌یابد). بنابراین، سرعت مداری به سمت بالا، یعنی با هوای گرم به سمت راست افزایش می‌یابد.



شکل ۳- برش باد گرمایی مربوط به گرادیان دما در جهت y .

اگر سرعت‌ها در یک سطح فشار دیگر و همچنین دمای بین دو لایه معلوم باشد، می‌توانیم با استفاده از باد گرمایی، سرعت‌های ژئوستروفیک را در سطح فشار مجاور به دست آوریم. حالت نشان داده شده در شکل (۴) را در نظر بگیرید. خطوط ژئوپتانسیل برای سطح پایین لایه، با خط‌چین نشان داده شده است. باد در این سطح با مقادیر بزرگ‌تر Φ_1 در سمت راست، موازی با این خطوط است. کانتورهای دما، خطوط سیاه پررنگ هستند که در آن دما به سمت راست افزایش می‌یابد. بردار باد گرمایی، با دماهای بیش‌تر در سمت راست، موازی با این کانتورها می‌باشد. بردارهای V_1 و V_T را برای به دست آوردن بردار V_2 که همان بردار باد در سطح بالایی است، اضافه می‌کنیم. جهت این به سمت شمال غربی است و هوای گرم را به سمت سرد انتقال می‌دهد.



شکل ۴- باد گرمایی بین دو لایه (۱ و ۲): خط‌چین‌ها کانتورهای ارتفاع ژئوپتانسیل، برای لایه پایینی (Φ_1) و خطوط سیاه پررنگ، کانتورهای دما می‌باشند.

توجه کنید که بردار باد با ارتفاع به صورت ساعت‌گرد می‌چرخد. این باد پیش‌گرد^۱ نامیده می‌شود و نمونه‌ای از فرارفت گرم است. فرارفت سرد، چرخشی به صورت پادساعت‌گرد ایجاد

^۱ Veering wind (باد پیش‌گرد): بادی است که سمت آن با زمان یا ارتفاع به صورت ساعت‌گرد تغییر می‌کند.

می‌کند که باد پس‌گرد^۱ نامیده می‌شود. بنابراین باد ژئوستروفیک، موازی با کانتورهای ژئوپتانسیل با مقادیر بزرگ‌تر در سمت راست باد (در نیم‌کره شمالی) است. از طرفی، باد گرمایی، موازی با کانتورهای متوسط دما با مقادیر بزرگ‌تر در سمت راست است. البته به‌خاطر داشته باشید که باد گرمایی یک باد واقعی نیست، بلکه اختلاف بین بادهای تراز بالایی و تراز پایینی است.

روابط باد گرمایی برای اقیانوس، با گرفتن مشتقات Z روابط ژئوستروفیک بوسینسک (۳۰ و ۳۱) و سپس با فراخوانی رابطه هیدرواستاتیک به‌دست می‌آیند. نتیجه به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{g}{\rho_c f} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (47)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{\rho_c f} \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (48)$$

بنابراین، برش در اقیانوس به گرادیان‌های جانبی چگالی بستگی دارد که می‌تواند ناشی از تغییرات دما یا شوری باشد. روابط (۴۷) و (۴۸) معمولاً، به‌طور معمول برای تخمین جریان‌های اقیانوسی استفاده می‌شوند که با اندازه‌گیری چگالی از کشتی‌ها به‌دست می‌آیند. کشتی‌ها اندازه‌گیری‌های هیدروگرافی دما و شوری را جمع‌آوری کرده و سپس با استفاده از معادله حالت (۱۱) برای تعیین $\rho(x, y, z, t)$ استفاده می‌شوند. سپس روابط باد گرمایی از سطح انتخابی به سمت بالا، انتگرال‌گیری می‌شود تا (u, v) در بالای سطح تعیین گردد، به‌عنوان مثال:

$$u(x, y, z) - u(x, y, z_0) = \int_{z_0}^z \frac{1}{\rho_c f} \frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial y} dz \quad (49)$$

اگر (u, v, z_0) در سطح پایینی صفر باشد، «سطح بدون حرکت»^۲ نامیده می‌شود.

^۱ Backing wind (باد پس‌گرد): بادی است که سمت آن با زمان یا ارتفاع به‌صورت پادساعت‌گرد تغییر می‌کند.

^۲ level of no motion

۱-۶- معادلهٔ تاوایی^۱

تاوایی یک کمیت مهم در دینامیک است و کرل^۲ سرعت می‌باشد:

$$\vec{\zeta} \equiv \nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (50)$$

تاوایی از آنجایی که مربوط به حرکت چرخشی است، شبیه تکانهٔ زاویه‌ای می‌باشد. گردباد^۳ با حرکت چرخشی قوی و پاد ساعت‌گرد، تاوایی قابل توجهی دارد. چرخش زمین تاوایی را تغییر می‌دهد، زیرا خود زمین در حال چرخش است. همان‌طور که در بخش (۱-۱) ذکر شد، سرعت مشاهده شده توسط ناظر ثابت، مجموع سرعت مشاهده شده در چارچوب چرخان (زمین) و یک جملهٔ چرخشی است:

$$\vec{u}_F = \vec{u}_R + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (51)$$

تاوایی نیز تغییر می‌کند:

$$\vec{\zeta}_a = \nabla \times (\vec{u} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{\zeta} + 2\vec{\Omega} \quad (52)$$

$\vec{\zeta}_a$ تاوایی مطلق^۴ نامیده می‌شود. تاوایی مطلق مجموع تاوایی نسبی^۵ $\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{u}$ و تاوایی سیاره‌ای^۶ $2\vec{\Omega}$ است. از آنجایی که حرکت مقیاس سینوپتیکی تحت تأثیر سرعت‌های افقی است، مهم‌ترین مؤلفهٔ تاوایی مؤلفهٔ قائم است:

$$\zeta_a \cdot \hat{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x} v - \frac{\partial}{\partial y} u \right) + 2\Omega \sin(\theta) \equiv \zeta + f \quad (53)$$

این تنها مؤلفه‌ای است که در نظر خواهیم گرفت. می‌توانیم از معادلات تکانه افقی، معادله‌ای برای ζ استخراج کنیم. برای این کار، از معادلات تقریبی که پس از مقیاس‌بندی به دست

¹ vorticity equation

² curl

³ tornado

⁴ absolute vorticity

⁵ relative vorticity

⁶ planetary vorticity

آورده‌ایم، استفاده کرده و جملات را برای مرتب کردن عدد راسبی حفظ می‌کنیم (جملات ژئوستروفیک، به اضافه جملات مشتق زمانی و فرارفت). از معادلات بوسینسک استفاده خواهیم کرد؛ اگر از مختصات فشار استفاده کنیم دقیقاً همان معادله به دست می‌آید. معادلات به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u - f v &= -\frac{1}{\rho_c} \frac{\partial}{\partial x} p \\ \frac{\partial}{\partial t} v + u \frac{\partial}{\partial x} v + v \frac{\partial}{\partial y} v + f u &= -\frac{1}{\rho_c} \frac{\partial}{\partial y} p \end{aligned} \quad (54)$$

که در آن:

$$f = f_0 + \beta y$$

برای به دست آوردن معادلهٔ تاوایی، از معادلات مشتق ضرب‌دری می‌گیریم: یعنی، از معادلهٔ دوم نسبت به x و از معادلهٔ اول نسبت به y مشتق می‌گیریم و آنها را از هم کم می‌کنیم. نتیجهٔ کار، پس از چند بار مرتب کردن، به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial}{\partial t} \zeta + u \frac{\partial}{\partial x} \zeta + v \frac{\partial}{\partial y} \zeta + v \frac{df}{dy} + (\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (55)$$

یا از طرفی:

$$\frac{d_H}{dt} (\zeta + f) = -(\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (56)$$

که در آن:

$$\frac{d_H}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad (57)$$

مشتق لاگرانژی براساس سرعت‌های افقی است. توجه کنید که ما می‌توانیم معادله را به شکل فوق بنویسیم، زیرا f تنها تابعی از y است.

یکی از ویژگی‌های مفید معادلهٔ تاوایی این است که جملهٔ فشار حذف شده است. این از تقریب بوسینسک تبعیت می‌کند، اگر آن را انجام نمی‌دادیم، جملات شامل مشتقات چگالی وجود داشت. به همین ترتیب، ژئوپتانسیل در هنگام استفاده از مختصات فشار حذف می‌شود. این به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

۱-۶-۱- قضیهٔ کلونین^۱

معادلهٔ تاوایی مبتنی بر نتیجه‌ای است که به قضیهٔ کلونین معروف است که در پیوست (الف) به‌دست آمده است. این امر در دینامیک سیالات چرخان اهمیت زیادی دارد. این مربوط به نحوهٔ ارتباط تاوایی و عرض جغرافیایی بستهٔ سیالی با مساحت آن است. برای مشاهدهٔ این موضوع، سطح کوچکی از سیال را در نظر بگیرید:

$$A = \delta x \delta y \quad (58)$$

با استفاده از مشتق زمانی افقی، داریم:

$$\frac{dA}{dt} = \delta y \frac{d}{dt} \delta x + \delta x \frac{d}{dt} \delta y = \delta y \delta u + \delta x \delta v \quad (59)$$

با تقسیم بر A و در حد وقتی $\delta \rightarrow 0$ ، داریم:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (60)$$

بنابراین، تغییر نسبی در سطح برابر با واگرایی افقی است.

به این ترتیب، معادلهٔ تاوایی (۵۶) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{d_H}{dt} (\zeta + f) = - \frac{(\zeta + f)}{A} \frac{d_H A}{dt} \quad (61)$$

(می‌توانیم عبارت dA/dt را به این صورت بنویسیم، زیرا A تنها تابعی از (x, y) است).

¹ Kelvin's theorem

با ترکیب سمت چپ و راست معادله (۶۱)، داریم:

$$\frac{d_H}{dt} (\zeta + f)A = 0 \quad (62)$$

بنابراین، حاصل ضرب تاوایی مطلق و سطح سیال با حرکت پایسته می‌ماند. این قضیه کلوین، به افتخار لرد کلوین^۱ (۱۸۶۹) می‌باشد. در نتیجه، داریم:

$$(\zeta + f)A = \text{constant} \quad (63)$$

بنابراین، اگر مساحت بسته یا عرض جغرافیایی تغییر کند، برای جبران آن باید تاوایی آن تغییر کند. یک مثال از آن در مسائل آورده شده است.

۱-۶-۲- معادله تاوایی شبه ژئوستروفیک^۲

در بخش (۲-۱)، دیدیم که سرعت‌های افقی عمدتاً در تعادل ژئوستروفیک هستند. می‌توانیم از این نوشتن یک حالت ساده‌تر معادله تاوایی استفاده کنیم. نخست می‌توان سرعت‌های افقی را با معادل‌های ژئوستروفیک آنها در مشتق لاگرانژی جای‌گزین کرد:

$$\frac{d_H}{dt} \rightarrow \frac{d_g}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \quad (64)$$

به‌طور مشابه، می‌توانیم تاوایی را با شکل ژئوستروفیک آن جای‌گزین کنیم:

$$\zeta \rightarrow \zeta_g = \frac{\partial}{\partial x} v_g - \frac{\partial}{\partial y} u_g \quad (65)$$

بنابراین، معادله تاوایی تقریباً به‌صورت زیر است:

$$\frac{d_g}{dt} (\zeta_g + \beta y) = -(\zeta_g + f_0 + \beta y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (66)$$

¹ Lord Kelvin

² Quasi-geostrophic vorticity equation

ما در صفحهٔ بتا، نسخهٔ f را جای‌گزین کرده و عبارت f_0 را در سمت چپ معادله حذف کرده‌ایم، چون ثابت است (بنابراین مشتق آن صفر است). همچنین، می‌توانیم سمت راست معادله را کمی ساده کنیم. در تقریب صفحهٔ بتا، عبارت βy بسیار کمتر از f_0 است. اما معلوم شد که تاوایی نیز بسیار کوچک‌تر است. نسبت آنها به صورت زیر مقیاس می‌شود:

$$\frac{|\zeta_g|}{f_0} \propto \frac{U}{f_0 L} = \epsilon$$

چون تاوایی به صورت U/L مقیاس می‌شود. از آنجایی که عدد راسبی ϵ ، برای حرکت مقیاس سینوپتیکی از مرتبهٔ $1/10$ است، تاوایی 10 برابر کوچک‌تر از f_0 است. بنابراین، می‌توان معادلهٔ تاوایی را به خوبی با رابطهٔ زیر تقریب زد:

$$\frac{dg}{dt} (\zeta_g + \beta y) = -f_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (67)$$

حالا سمت راست معادله را در نظر بگیرید. اگر سرعت‌ها را با اشکال ژئوستروفیک آنها جای‌گزین کنیم، این جمله حذف می‌شود، زیرا سرعت‌های ژئوستروفیک در حالت افقی ناواگرا هستند (بخش ۱-۴-۲). بنابراین، باید شرایط تراکم‌ناپذیری را با دقت بیشتری بررسی کنیم. ابتدا سرعت‌ها را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$u = u_g + u_a, \quad v = v_g + v_a \quad (68)$$

در اینجا (u_a, v_a) ، سرعت‌های غیرژئوستروفیک^۱ هستند و بسیار کوچک‌تر از سرعت‌های ژئوستروفیک می‌باشند. به خصوص:

$$\frac{|u_a|}{|u_g|} = O(\epsilon) \quad (69)$$

و برای v_a/v_g نیز به همین ترتیب می‌باشد.

بنابراین اگر عدد راسبی $0/1$ باشد، سرعت‌های غیرژئوستروفیک 10 برابر کوچک‌تر است.

¹ ageostrophic

با جای‌گزینی اینها در شرایط تراکم‌ناپذیری رابطه (۳۳) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(u_g + u_a) + \frac{\partial}{\partial y}(v_g + v_a) + \frac{\partial}{\partial z}w \\ = \frac{\partial}{\partial x}u_a + \frac{\partial}{\partial y}v_a + \frac{\partial}{\partial z}w = 0 \end{aligned} \quad (70)$$

زیرا، باز سرعت‌های ژئوستروفیک در حالت افقی ناواگرا هستند. حال اگر هر سه جمله به یک اندازه مهم باشند، پس w باید از نظر اندازه با سرعت‌های غیرژئوستروفیک یکی باشد که آن هم مرتبهٔ عدد راسبی است. با توجه به معادلهٔ تاوایی، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{d_g}{dt}(\zeta_g + \beta y) = f_0 \frac{\partial}{\partial z}w \quad (71)$$

سمت راست این معادله، علی‌رغم کوچک بودن، مهم است. این باعث تغییرات تاوایی مطلق در بسته‌هایی می‌شود که توسط جریان ژئوستروفیک منتقل می‌شوند. متغیرها را برحسب تابع جریان زیر می‌نویسیم:

$$\psi = \frac{p}{\rho_c f_0} \quad (72)$$

بنابراین، روابط ژئوستروفیک به صورت زیر ساده می‌گردند:

$$u = -\frac{\partial}{\partial y}\psi, \quad v = \frac{\partial}{\partial x}\psi \quad (73)$$

و تاوایی عبارت است از:

$$\zeta_g = \frac{\partial}{\partial x}v_g - \frac{\partial}{\partial y}u_g = \nabla^2\psi \quad (74)$$

با استفاده از این روابط، معادلهٔ تاوایی به صورت زیر است:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}\right)(\nabla^2 \psi + f) = f_0 \frac{\partial}{\partial z} w \quad (۷۵)$$

این معادلهٔ تاوایی شبه ژئوستروفیک است. زیبایی این معادله در این است که تنها دو مجهول دارد؛ تابع جریان (بیان گر فشار) و سرعت قائم. این معادله مبنای بسیاری از کارهای بعدی خواهد بود. در اینجا دو نکته قابل ذکر است. یکی این که اصولاً همان معادله با استفاده از مختصات فشار به دست می آید، البته اگر به جای آن تابع جریان را $\psi = \Phi/f_0$ تعریف کنیم. دوم این که سرعت قائم؛ اگرچه معمولاً در مقیاس‌های سینوپتیکی کوچک است، با این وجود یک عبارت واداشت مهم است که حرکت داخلی را با حرکتی که در لایه‌های مرزی رخ می دهد پیوند می دهد (کوپل می کند). نمونه‌ای از آن در بخش بعدی آورده شده است.

۱-۷- لایه‌های مرزی

کاربرد قضیهٔ کلونین در غیاب اصطکاک می باشد و در مقیاس‌های سینوپتیکی ضعیف است. با این حال، بدون اصطکاک هیچ چیزی برای حذف انرژی تأمین شده توسط خورشید (به جو) و توسط بادهای (به اقیانوس) وجود نخواهد داشت و سرعت‌ها تا بی نهایت شتاب می گیرند. جایی که اصطکاک مهم است، لایه‌های مرزی در سطح زمین در جو و در سطح و کف اقیانوس می باشد. این لایه‌ها چگونه بر حرکت داخلی تأثیر می گذارند؟

در اینجا می توان ساده ترین نمایش لایهٔ مرزی را در یک چارچوب چرخان در نظر گرفت. فرض می کنیم لایه دارای چگالی ثابت است و از مختصات Z استفاده می کنیم. داشتن چگالی ثابت مانند تقریب بوسینسک است، با این تفاوت که $\rho = \rho_c$ را در رابطهٔ هیدرواستاتیک نیز قرار می دهیم. بنابراین، با چگالی ثابت، برش قائم وجود ندارد. همچنین، فرض می کنیم که پارامتر کوریولیس ثابت است و آن را f_0 می نامیم.

یکی از ویژگی‌های اصلی لایهٔ مرزی این است که تعادل ژئوستروفیک توسط اصطکاک شکسته می شود. بنابراین به جای روابط (۳۰) و (۱۳۱) داریم:

$$-f_0 v = -\frac{1}{\rho_c} \frac{\partial}{\partial x} p + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\tau_x}{\rho_c} \quad (76)$$

$$f_0 u = -\frac{1}{\rho_c} \frac{\partial}{\partial y} p + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\tau_y}{\rho_c} \quad (77)$$

که در آن τ_x و τ_y تنش‌هایی هستند که در جهات x و y عمل می‌کنند. این معادلات را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$-f_0 v = -\frac{1}{\rho_c} \frac{\partial}{\partial x} p + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\tau_x}{\rho_c} \quad (78)$$

$$f_0 u = -\frac{1}{\rho_c} \frac{\partial}{\partial y} p + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\tau_y}{\rho_c} \quad (79)$$

که در آن (u_a, v_a) دوباره سرعت‌های غیرژئوستروفیک هستند. بنابراین سرعت‌های ژئوستروفیک در لایهٔ مرزی به طور مستقیم متناسب با تنش‌ها می‌باشند؛ اگر تنش‌ها را بدانیم، می‌توانیم این سرعت‌ها را پیدا کنیم. دغدغهٔ ما بیشتر این است که چگونه لایهٔ مرزی بر حرکت در داخل تأثیر می‌گذارد. همان‌طور که در بخش (۱-۶) اشاره گردید، عنصر کلیدی، سرعت قائم است که به عنوان یک عبارت واداشت در معادلهٔ تاوایی (۱۷۵) عمل می‌کند. اگر در لایهٔ مرزی جریان قائمی وجود داشته باشد، باید از داخل بوده و به نوبهٔ خود با تاوایی مرتبط باشد. بنابراین، تعیین سرعت‌های قائم در لایه‌های مرزی بسیار مهم هستند. ابتدا لایهٔ سطح اقیانوس را در نظر بگیرید. برای به دست آوردن w ، می‌توانیم از شرط تراکم‌ناپذیری رابطهٔ (۳۳) روی عمق لایه انتگرال بگیریم:

$$\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial x} u_a + \frac{\partial}{\partial y} v_a + \frac{\partial}{\partial z} w = 0 \quad (80)$$

به خاطر داریم که واگرایی فقط شامل سرعت‌های غیرژئوستروفیک است (چون سرعت‌های ژئوستروفیک در حالت افقی نااگرایی هستند).

در نتیجه:

$$w(0) - w(\delta) = - \int_{-\delta}^0 \left(\frac{\partial}{\partial x} u_a + \frac{\partial}{\partial y} v_a \right) dz \quad (۸۱)$$

که در اینجا δ ضخامت لایه است. از آنجایی که هیچ جریان قائمی از سطح اقیانوس وجود ندارد، می‌توانیم بنویسیم $w(0) = 0$. بنابراین در پایه لایه داریم:

$$w(\delta) = \frac{\partial}{\partial x} U + \frac{\partial}{\partial y} V \quad (۸۲)$$

که (U, V) انتقالات افقی در لایه هستند.

$$U \equiv \int_{-\delta}^0 u_a dz, \quad V \equiv \int_{-\delta}^0 v_a dz \quad (۸۳)$$

این معادلات را با انتگرال‌گیری قائم معادلات (۷۸) و (۷۹) به دست می‌آوریم. تنش در سطح ناشی از باد، در لایه سطحی اقیانوس τ^w است. تنش پایه لایه را صفر فرض می‌کنیم (زیرا تنش فقط در خود لایه عمل می‌کند). بنابراین به دست می‌آوریم:

$$U = \frac{\tau_y^w}{\rho_c f_0}, \quad V = - \frac{\tau_x^w}{\rho_c f_0}$$

از این‌رو، انتقال ژئوستروفیک در لایه، ۹۰ درجه به سمت راست تنش باد است. اگر باد به سمت شمال بوزد، انتقال به سمت شرق است. این نتیجه معروف اکمن^۱ (۱۹۰۵) است. نانسن^۲ متوجه شده بود که کوه‌های یخی در جهت باد حرکت نمی‌کنند، بلکه به سمت راست باد حرکت می‌کنند. مدل اکمن علت این رخداد را توضیح می‌دهد.

برای به دست آوردن سرعت قائم، واگرایی این انتقالات را در نظر می‌گیریم:

^۱ Ekman

^۲ Nansen

$$w(\delta) = \frac{\partial \tau_y^w}{\partial x \rho_c f_0} - \frac{\partial \tau_x^w}{\partial y \rho_c f_0} = \frac{1}{\rho_c f_0} \nabla \times \tau^w \quad (۸۴)$$

بنابراین سرعت قائم متناسب با کرل تنش باد است. برای جریان داخلی اقیانوس در مقیاس‌های سینوپتیکی، این کرل است که مهم است نه خود تنش. نکته مهم در اینجا این است که ما برای به دست آوردن این نتیجه، هیچ فرضی در مورد تنش در لایه سطحی نداشتیم. با انتگرال‌گیری از کل لایه، فقط لازم است تنش سطح را بدانیم. بنابراین نتیجه رابطه (۸۴) مستقل از توزیع تنش $\tau(z)/\rho$ در لایه است. پس لایه مرزی پایینی داریم که این لایه هم در اقیانوس و هم در جو وجود دارد.

با فرض صاف بودن کف (بستر)، انتگرال معادله پیوستگی برابر است با:

$$w(\delta) - w(0) = w(\delta) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} U + \frac{\partial}{\partial y} V\right) \quad (۸۵)$$

این بار، فرض می‌کنیم که سرعت قائم در بالای لایه حذف می‌شود. باز می‌توانیم از روابط (۷۸) و (۱۷۹) برای یافتن انتقال‌ها انتگرال بگیریم. با این حال، ما چیزی از تنش کف نمی‌دانیم، تنها چیزی که می‌دانیم این است که مرز کف حرکت نمی‌کند. بنابراین، باید تنش را در لایه مشخص کنیم. برای این کار تنش را برحسب سرعت پارامتر بندی می‌کنیم. ساده‌ترین راه این است که بنویسیم:

$$\frac{\vec{\tau}}{\rho_c} = A_z \frac{\partial}{\partial z} \vec{u} \quad (۸۶)$$

که در آن A_z ضریب اختلاط^۱ می‌باشد. بنابراین، اگر برش قائم در لایه بزرگ باشد، تنش نیز بزرگ است و بالعکس. به‌طور کلی، A_z اغلب با شیوه‌ای غیرمعمول، با ارتفاع تغییر می‌کند. در چنین مواردی، یافتن جواب‌های تحلیلی دشوار است. بنابراین، در حال حاضر فرض می‌کنیم که A_z ثابت است. این از فرمول اصلی اکمن (۱۹۰۵) پیروی می‌کند و اکنون جواب‌ها به لایه مرزی اکمن ارجاع می‌گردند. در این حالت، فرض می‌کنیم که جریان ژئوستروفیک در داخل سیال، یعنی بالای لایه مرزی، با سرعت (u_g, v_g) وجود دارد.

¹ mixing coefficient

نقش لایه مرزی این است که سرعت‌ها را در مرز پایینی ثابت می‌کند. با استفاده از این تنش‌ها می‌توان سرعت‌های ژئوستروفیک را در لایه حل کرد. جزئیات در پیوست (ب) آمده است.

با انتگرال‌گیری از سرعت‌ها در ارتفاع، می‌توان به‌دست آورد:

$$U = -\frac{\delta_e}{2}(u_g + v_g), \quad V = \frac{\delta_e}{2}(u_g - v_g)$$

که در آن، (u_g, v_g) سرعت‌های داخلی هستند. در جواب‌ها، عمق لایه اکمن δ_e ، با ضریب اختلاط A_z تعیین می‌شود که آن هم با رابطه زیر تعیین می‌گردد:

$$\delta_e = \sqrt{\frac{2A_z}{f_0}} \quad (87)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} w(\delta_e) &= \frac{\delta_e}{2} \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) + \frac{\delta_e}{2} \left(-\frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\delta_e}{2} \left(-\frac{\partial v_g}{\partial y} + \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) + \frac{\delta_e}{2} \left(-\frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\delta_e}{2} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) = \frac{\delta_e}{2} \nabla \times \vec{u}_g = \frac{\delta_e}{2} \zeta_g \end{aligned} \quad (88)$$

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، از این واقعیت استفاده کردیم که $\frac{\partial}{\partial x} u_g + \frac{\partial}{\partial y} v_g = 0$ بنابراین، سرعت قائم حاصل از لایه اکمن کف متناسب با تاوایی نسبی در داخل است. در نتیجه، می‌توانیم لایه‌های مرزی را بدون نگرانی در مورد آنچه که در خود لایه‌ها اتفاق می‌افتد، در نظر بگیریم. خواهیم دید که لایه‌های کف، به مرور زمان باعث فروپاشی تاوایی نسبی می‌شوند (بخش ۲-۶)، و تنش در سطح اقیانوس، به اقیانوس اعمال می‌گردد (به‌طور نمونه، بخش ۲-۷). می‌توانیم این دو اثر را لحاظ کرده و از این پس از اصطکاک صریح چشم‌پوشی کنیم.

۸-۱- مسائل

۱-۱- مقیاس گذاری

معادلهٔ تکانهٔ y را با فرضیات زیر مقیاس گذاری کنید.

$$U = \frac{1\text{m}}{\text{sec}}, \quad W = \frac{1\text{cm}}{\text{sec}}, \quad L = 100\text{m}, \quad D = 0.5\text{km}$$

همچنین از مقیاس زمانی فرارفت $T \propto L/U$ استفاده کنید. عبارت‌های غالب کدام هستند؟ فرض کنید، نمی‌توانیم افت فشار $\Delta p/\rho$ را اندازه‌گیری کنیم. آیا می‌توانید با توجه به مقیاس بالا تخمین بزنید که آن چقدر است؟ اگر افت فشار در واقع بسیار کمتر از این مقدار بود، نظر شما در مورد حرکت چیست؟ در نهایت، معادلهٔ تقریبی را بنویسید.

۲-۱- معادلهٔ تاوایی

معادلهٔ (۵۶) را استخراج کنید. اکنون به جای مختصات z از مختصات فشار p استفاده کرده و دوباره آن را استخراج کنید.

۳-۱- فشار جوی

فشار سطحی در جو به دلیل وزن کل هوای ستون جو بالای سطح است. از رابطهٔ هیدرواستاتیک برای تخمین میزان فشار سطحی استفاده کنید. فرض کنید که چگالی جو به صورت تصاعدی (نمایی) با ارتفاع کاهش می‌یابد:

$$\rho(z) = \rho_0 \exp(-z/H)$$

که در آن $\rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$ و مقیاس ارتفاع $H = 8.6 \text{ km}$ است. همچنین فرض کنید فشار در $z = \infty$ صفر است.

۴-۱- سرعت‌های غیرژئوستروفیک^۱

با استفاده از مقیاس‌گذاری، پیدا کنید که معمولاً بزرگی سرعت‌های غیرژئوستروفیک چقدر می‌باشند. به‌طور خاص، از این واقعیت استفاده کنید که واگرایی افقی سرعت‌های غیرژئوستروفیک هم اندازه با مشتق قائم سرعت قائم می‌باشد.

۵-۱- سرعت‌های قائم

شرایط تراکم‌ناپذیری را بررسی کنید. سرعت‌های افقی را به دو قسمت ژئوستروفیک و غیرژئوستروفیک جدا کنید و آنها را در معادله قرار دهید. چه اتفاقی می‌افتد، اگر:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = O|1|$$

در حالت خاص، اگر مرز پایینی سطح صافی با $w = 0$ باشد، میدان سرعت چگونه خواهد بود؟

۶-۱- مسئله ۲-۶- در هولتون^۲

عبارتی برای چگالی ρ به‌دست آورید که وقتی بسته‌ی هوای خشک در ابتدا در فشار p_s و چگالی ρ_s به‌طور بی‌دررو^۳ تا فشار p منبسط می‌شود.

۷-۱- جت جنوبی^۴

فرض کنید که دمای قطب جنوب ۲۰- درجه سانتی‌گراد و در استوا ۴۰ درجه سانتی‌گراد است. با فرض اینکه میانگین سرعت باد در سطح زمین صفر باشد (۱۰۰۰ هکتوپاسکال (hPa))، میانگین سرعت مداری در ۲۵۰ هکتوپاسکال و در ۴۵ درجه جنوبی چقدر است؟ فرض کنید گرادیان دما با عرض جغرافیایی و فشار ثابت است. روابط باد گرمایی^۵ را در

¹ Ageostrophic velocities

² Holton

³ Adiabatic

⁴ Southern Jet

⁵ Thermal wind

مختصات فشار (با گرفتن مشتقات روابط ژئوستروفیک) استخراج کنید. سپس از این روابط با توجه به فشار، برای پیدا کردن اختلاف سرعت بین سطح و ۲۵۰ هکتوپاسکال، انتگرال بگیرید.

۱-۸- پایستگی تاوایی^۱

یک ناحیه دایره‌ای از هوا در ۳۰ درجه شمالی با شعاع ۱۰۰ کیلومتر تا دو برابر شعاع اولیه خود منبسط می‌شود. اگر هوا در ابتدا در حالت سکون باشد، میانگین سرعت مماسی در لبه دایره پس از انبساط چقدر است؟ از قضیه کلوین استفاده کنید (بخش ۱-۶-۱).

۱-۹- مسئله ۲-۴ در هولتون

یک ستون استوانه‌ای از هوا در ۳۰ درجه شمالی با شعاع ۱۰۰ کیلومتر تا دو برابر شعاع اولیه خود منبسط می‌شود. اگر هوا در ابتدا در حالت سکون باشد، میانگین سرعت مماسی در محیط پس از انبساط چقدر است؟

¹ Conservation of vorticity